STUDIER I DET OPTIMALA TILLGÅNGSVALETS TEORI

AV

TÕNU PUU

UPPSALA 1964

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548909_0027

STUDIER I DET OPTIMALA TILLGÅNGSVALETS TEORI

STUDIER I DET OPTIMALA TILLGÅNGSVALETS TEORI

AV

TÕNU PUU

UPPSALA 1964

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Almqvist & Wiksells
BOKTRYCKERI AKTIEBOLAG
UPPSALA 1964

FÖRORD

Denna avhandling utgör resultatet av mina 1960 påbörjade studier över teorierna för de enskilda subjektens val av förmögenhetsobjekt och för prisbildningen på marknaderna för dessa. Mitt huvudintresse riktade sig till en början mot marknadsprisbildningens problem och i synnerhet mot en förklaring av olikheterna i kurser och effektiva räntesatser på marknaderna för obligationer av olika lång återstående löptid. Under arbetets gång gjorde sig emellertid frånvaron av en teori för de enskilda subjektens optimala handlande, på vilken marknadsteorin skulle kunna byggas, alltmer påmind. Resultatet blev en fortgående förskjutning av arbetets tyngdpunkt så att det här föreliggande slutresultatet nästan uteslutande handlar om det enskilda subjektet.

Under hela arbetets gång har professor Tord Palander visat ett vänligt intresse långt utöver vad jag haft rätt att vänta mig och tagit sig tid till att försöka leda mig in på praktiskt betydelsefulla problemställningar varje gång jag har varit på väg att helt bosätta mig i de teoretiska abstraktionernas värld. En avsevärd stimulans för mitt arbete har under hela denna tid utgjorts av kontakten med professor Palander, vilken genom sin kombination av teoretiskt skarpsinne och vanvördnad för etablerade teorier synes mig ha varit den idealiske forskarhandledaren.

Professor Harald Dickson har läst delar av avhandlingen i manuskript och givit många värdefulla råd, varför jag är honom stort tack skyldig.

Jag vill även tacka fil. kand. Sture Skogh, vilken läst avhandlingen i manuskript och korrektur samt kontrollerat de matematiska formlerna.

Uppsala i januari 1964. *Tõnu Puu*

Innehållsförteckning

Kapitel I. *Inledning* 11

Kapitel II. *Innebörden av investeringskalkyler* 15

1. Problemställningen 15
   Investeringar som serier av nettointäkter 15
   Investeringskalkyler 18
   Interna räntan som preferenskriterium 20
   Kapitalvärdet som preferenskriterium 23
   Kritiken mot användning av investeringskalkyler 29
   Objektiva preferensrelationer 32
   Appendix: 33

2. Formalisering av förutsättningarna 39

3. Bestämning av transformationsmängden 46
   a) Härledning av T vid olika in- och utlåningsräntor för två perioder 48
   b) Härledning av T vid olika in- och utlåningsräntor för tre perioder 53
   c) Härledning av T vid olika in- och utlåningsräntor för godtyckligt periodantal 61
   d) Specialfall: in- och utlåningsräntorna sammanfaller 67
   e) Specialfall: lån är ej möjliga och deposition kan endast ske genom tesaurering 67
   f) Generalisering till det fall då räntesatserna varierar mellan olika perioder 69
   g) Generalisering till det fall då in- och utlåningsräntornas höjd beror av det lånade eller deponerade beloppet 69

4. Villkor för objektiv preferensrelation mellan investeringar 72
   a) Val mellan två olika investeringsalternativ 72
   b) Specialfall: lån är ej möjliga och depositioner måste ske i form av tesaurering 76
   c) Val mellan alternativen att genomföra eller avstå från en investering 77

5. Villkor som måste gälla även då objektiv preferensordning ej föreligger 80

6. Slutsatser 82

Kapitel III. *Portföljsammansättning av obligationer som behålls tills de inlösas* 86

1. Problemställningen 86
2. Beteckningar 87
3. Antalet olika obligationer som kan ingå i en portfölj 89
4. Lika många obligationer köps som antalet perioder 90

a) Optimum 91
b) Vilka obligationer kan ingå i den optimala portföljen? 92
c) Förskjutningar av optimum 95

5. Färre obligationer ingår i den optimala portföljen än antalet perioder 98
a) Villkor för optimum 100
b) Förskjutningar av optimum 103

6. Bankplaceringar och lån kombineras med obligationsplacering . . . 103
a) In- och utlåningsräntorna sammanfaller 104
b) Olika in- och utlåningsräntor 106
c) Optimum 107
d) Förskjutningar av optimum 109

7. Sammanfattning 110
8. Appendix: Objektiva preferensrelationer mellan å ena sidan en obligationsportfölj och å den andra ur den uteslutna obligationer. . . 113

Kapitel IV. *Definition och beräkning av intern (effektiv) ränta* 117

1. Definition 117
2. Entydighet 118
3. Effektiv ränta vid helårs-, halvårs- och kvartalskuponger 124
4. En grafisk beräkningsmetod 129
5. Appendix om de av Boulding och Hicks definierade begreppen tidscentrum och produktionsperiod 134

Kapitel V. *Löptidsstrukturen av effektiva räntor* 139

1. Problemställning 139
2. Matematisk formulering 140
3. Variation av nominella räntan 144
4. Variation av återstående löptiden 147
5. Specialfall: pariobligationer 150
6. Förändringar av löptidsstrukturen 155

Kapitel VI. *Portföljoptimum för en enstaka period vid osäkerhet* 157

1. Något om problemställning och förutsättningar 157
Sättet att behandla osäkerhet om tillgångarnas framtida värde . . . 157
Konsumtion, sparande och optimal förmögenhetssammansättning . . 158
Komparativ statik 159
Förväntningarnas och preferensernas beroende av de aktuella tillgångspriserna 160
Exkurs om förväntningar och riskvärdering 160

2. Preferensernas karaktär 166
Fall 1 166
Fall 2 170
Fall 3 172
Appendix: En enkel härledning av »expected utility»-doktrinen . . . 175

3. Optimal fördelning av en given förmögenhet på två tillgångar . . . 181
a) Om preferensordningen i q_1 q_2-planet och restriktionerna för de tillgångskvantiteter som kan väljas 181
b) Om optimum 185

4. Förskjutning av optimum till följd av ändrad förmögenhet och ändrade tillgångspriser under givna förväntningar 187
5. Exkurs om förmögenhetseffekten vid pengar och en obligation . . . 197
6. Förskjutning av optimum till följd av ändrade tillgångspriser när förväntningarnas medelvärde är elastiskt men osäkerheten i dem ej påverkas 204
7. Effekten på optimum av ökad osäkerhet 214
8. Optimal förmögenhetsplacering när den placerade förmögenhetens storlek beror på vilket belopp som undantas för omedelbar konsumtion 218
Specialfall 221
9. Sammanfattning 223

KAPITEL VII. *Dynamisk planering av värdepappersinnehav vid osäkerhet* . 228

1. Inledning 228
2. Precisering av problemställningen vid ett värdepapper 229
a) Förstaordningsvillkoren 233
b) Andraordningsvillkoren 234

3. Dynamisk programmering och additiv nyttofunktion 238
a) Optimum 238
b) Andraordningsvillkoren 242
c) Komparativ statik 244
d) Exkurs: Förväntningseffekten vid Markov-processer 248

4. Generalisering till det fall då placering kan ske såväl i ett värdepapper som i kontant kassa 251
a) Förstaordningsvillkoren 252
b) Andraordningsvillkoren 253
c) Komparativ statik 257
d) Effekten av förändringar i den aktuella inkomstens storlek 258
e) Effekten av förändringar i den initiella förmögenheten 260
f) Effekten av ett höjt värdepapperspris vid oelastiska förväntningar och under inkomstkompensation 262
g) Effekten av en isolerad förändring av värdepapperspriset vid oelastiska förväntningar på värdepappers- och kontantinnehav . . . 264
h) Varför inkomsteffekterna ej kan försummas 266
i) Effekten på konsumtionen av ett höjt värdepapperspris under oelastiska förväntningar 267
j) Sammanfattning om effekterna av ett förändrat värdepapperspris för en enskild individ och för ett aggregat av individer 267

5. Statik och dynamik vid stock- och flow-analys 269

Kapitel VIII. *Finanspolitikens likviditetsverkningar* 273

Kapitel IX. *Summary* 284

Förteckning över viktigare symboler 304
Litteraturförteckning 309

KAPITEL I

INLEDNING

I den följande framställningen diskuteras ett antal teoretiska beslutsmodeller för det enskilda ekonomiska subjektets val av tillgångar. Det görs inga empiriskt institutionella undersökningar rörande de motiv som i verkligheten dikterar dessa valhandlingar för olika typer av ekonomiska subjekt. En rent teoretisk diskussion synes emellertid vara berättigad eftersom teorin för optimalt val av varor som har *beståndskaraktär* — till skillnad från teorin för optimalt val av varor som har *strömkaraktär* — ännu ej har erhållit någon enhetlig och allmänt accepterad form. Inom den etablerade investeringsteorin och inom den moderna portföljvalsteorin kan man finna olika hypoteser beträffande motiven för tillgångsvalet, men deras sammanhang inbördes — liksom deras sammanhang med relevanta delar av den ekonomiska teorin i övrigt — har blivit mycket litet diskuterat.

Avsaknaden av en sammanhängande mikroekonomisk teori för det enskilda subjektets handlande i avseende på »beståndsvarorna» har bland annat medfört att makroekonomiska modeller — som i övrigt bygger på en enhetlig och allmänt accepterad mikroekonomisk teori — för »beståndsvarornas» del måste byggas på särskilda, för tillfället gjorda, mikroekonomiska förutsättningar. Det innebär bland annat att dessa förutsättningar — som ju diskuteras i förbigående — ofta införs på tämligen lösa grunder.

Typiskt är att man i regel vid uppställandet av marknadsefterfrågefunktioner för varor av beståndskaraktär utgår från att valhandlingsteorin för varor av strömkaraktär utan vidare kan tillämpas även för varor av beståndskaraktär. Det visar sig emellertid i det följande att det måste finnas mycket grundläggande skillnader mellan valhandlingsteorierna för »beståndsvaror» (»stocks») och för »strömvaror» (»flows»). De senare ger en direkt nytta genom att förbrukas — de förra endast en indirekt genom att föra över köpkraft till framtiden. Dessa skillnader är i själva verket så djupgående att de gör det tvivelaktigt om meningsfulla efterfrågefunktioner för »beståndsvaror» överhuvud taget kan definieras så som för »strömvaror».

Den nuvarande situationen, där knappast ens det för en teori om det enskilda subjektets val av »beståndsvaror» mest fundamentala har blivit

utrett, torde även kunna motivera att det i den följande framställningen ej göres något försök att skilja på olika typer av ekonomiska subjekt. Ytterst gäller det ju för alla subjekt att innehavet av »beståndsvaror» avses möjliggöra överflyttning av köpkraft till framtiden. Preferenserna förutsätts således för samtliga subjekt vara formulerade för den — säkra eller sannolikhetsfördelade — sekvens av penningintäkter som försäljningarna av innehavda »beståndsvaror» eller uppbörden av deras avkastningar förväntas ge upphov till. Sålunda antas alternativa handlingssätt — i form av omedelbart verkställda valhandlingar ensamma eller i förening med s. k. strategier som föreskriver sekvenser av konditionella planer för framtida valhandlingar — av samtliga subjekt bli värderade enligt preferenser formulerade på angivet sätt.

Lika litet som den följande framställningen differentieras för olika typer av ekonomiska subjekt — lika litet differentieras den för olika typer av »beståndsvaror». I huvudsak avser diskussionen finansiella »beståndsvaror» — kontanter, obligationer, aktier. Endast vissa partier är även tillämpliga för »beståndsvaror» som anläggningar och varulager hållna för produktions- eller spekulationsändamål.

Den följande framställningen gör emellertid ej anspråk på att konstruera någon fullständig teori för det optimala tillgångsvalet ens under dessa förenklade förutsättningar. Endast några få problem på området har kunnat tas upp till behandling.

I Kapitel II diskuteras förutsättningarna för att man genom s. k. investeringskalkyler »objektivt» skall kunna avgöra valet mellan två alternativa investeringar, vilka leder till var sin med full visshet förutsedda sekvens av daterade positiva och negativa betalningar, oberoende av de subjektiva preferenserna för konsumtionens fördelning i tiden hos det investerande subjektet, vars enda ändamål är att med hjälp av investeringsverksamheten omfördela sin konsumtion över tiden. Problemet är tämligen enkelt när subjektet kan låna in och låna ut obegränsade belopp till en sammanfallande och av beloppens storlek oberoende räntesats. Det har blivit fullständigt löst redan av Irving Fisher i hans *Theory of Interest*. Mera komplicerat blir det hela under det mera realistiska antagandet att in- och utlåningsräntorna har skilda värden och att de marginella räntesatserna varierar med de utestående skuldernas eller fordringarnas storlek.

Det visar sig vara lämpligt för diskussionen under de angivna förutsättningarna att formulera den i mängdteoretiska begrepp. Detta för den ekonomiska teorin utomordentligt lämpade instrument har tyvärr ännu ej helt slagit igenom bland ekonomerna. På grund härav har diskussionen av vissa enkla fall — som även hade kunnat genomföras utan dessa hjälp-

medel — gjorts mycket omständlig i avsikt att bereda de läsare vilka står främmande för mängdläran (set-teorin eller den matematiska klasslogiken) ett tillfälle att bekanta sig med denna i fortsättningen använda metodik. Denna metodiks utformning har i tillämpliga delar övertagits från Gerard Debreu, vilken i sin *Theory of Value* har åstadkommit den hittills grundligast genomförda tillämpningen av mängdteoretiska metoder på nationalekonomins område.

I Kapitel III diskuteras under samma förutsättningar som i Kapitel II optimum för en hel portfölj kombinerad av flera olika finansiella placeringsobjekt, vilka alla leder till med full visshet förutsedda betalningssekvenser. Dels används lineära programmeringsmetoder för att avgöra vilka kombinationer av obligationstyper som kan tänkas ingå i optimala portföljer. Dels anges med hjälp av marginalanalysen jämviktsvillkoren för optimalläget när de subjektiva preferenserna för konsumtionsfördelningar i tiden är kända och kan uttryckas i en nyttofunktion. Från optimalvillkoren härleds efterfrågefunktionerna, vilkas derivator även blir föremål för undersökning. Kapitel III är således att betrakta som en direkt fortsättning av Kapitel II.

Kapitel IV består av en rent formell diskussion om begreppet intern eller effektiv ränta, dess definition och beräkning. Bland annat undersöks de egenskaper betalningsserierna måste ha för att de skall leda till multipla värden på interna räntan och de komplikationer för investeringskalkylerna som härvid uppkommer. Vidare konstrueras en grafisk metod för beräkning av effektiv ränta på obligationer. I appendix till kapitlet undersöks de av Boulding och Hicks definierade måtten tidscentrum och genomsnittlig produktionsperiod.

Kapitel V innehåller en diskussion om den »klassiska» av Lutz utformade teorin för löptidsstrukturen av kurser och effektiva räntor på obligationsmarknaderna vid fullständigt förutsedd framtid. Frågeställningen kan förefalla malplacerad i denna framställning om det enskilda subjektets valhandlingar. Emellertid består den diskuterade teorin huvudsakligen i en rent mikroekonomisk härledning av villkoren för att ett enskilt subjekt ständigt ska betrakta alla olika obligationstyper som likvärdiga placeringsobjekt. Genom antagandet att framtiden är fullständigt förutsedd av alla placerande subjekt blir det hela även en marknadsteori för kursbildningen. Som sådan är den naturligtvis ytterst orimlig på grund av de försummade osäkerhetsfaktorerna.

I Kapitel VI förs osäkerheten in i diskussionen. Undersökningen gäller optimum för en portfölj sammansatt av två olika värdepapper under en enstaka period varvid förväntningarna för värdepapperspriserna vid placeringsperiodens slut förutsätts vara formulerade som ömsesidigt korrele-

rade sannolikhetsfördelningar. Preferenserna för alternativa sannolikhetsfördelningar av portföljvärdet vid placeringsperiodens slut förutsätts vara sådana att »expected utility»-doktrinen gäller och sådana att fördelningarnas medelvärden och centralmoment upp till andra eller tredje ordningen innehåller all ur preferenssynpunkt relevant information om fördelningarna. Framställningen följer således de av Harry M. Markowitz i hans *Portfolio Selection* utstakade vägarna. Sedan optimalvillkoren angivits härleds efterfrågefunktionerna för de bägge värdepapperen. Huvuddelen av kapitlet ägnas åt diskussion av efterfrågeelasticiteterna under olika förutsättningar om portföljens faktiska sammansättning och om elasticiteten mellan värdepapperens förväntade och aktuella marknadspriser.

Kapitel VII innehåller en diskussion om dynamisk planering vid osäkerhet av portföljsammansättningen under ett godtyckligt antal perioder. Preferenserna antas vara formulerade för sannolikhetsfördelningar av det placerande subjektets konsumtion under den sekvens av perioder som planeringen avser. De alternativ som skall värderas enligt de angivna preferenserna är kombinationer av omedelbart verkställda beslut om värdepappersportföljens storlek och sammansättning för den innevarande perioden och konditionella planer för beslut om värdepappersportföljens storlek och sammansättning under de följande perioderna. Diskussionen genomföres för ett värdepapper med osäker prisutveckling enbart och i kombination med kontanter. Två olika metoder används för att bestämma optimum, nämligen, dels variationskalkyl och dels dynamisk programmering såsom denna metod utvecklats av Richard Bellman i *Dynamic Programming*. Avsikten är att härleda efterfrågefunktioner för värdepapper och för kontanter samt att undersöka efterfrågefunktionernas derivator. Kapitlet innehåller även en allmän diskussion om innebörden i dylika efterfrågefunktioner och om meningsfullheten i komparativt statisk analys av modeller där dylika efterfrågefunktioner ingår.

Kapitlet VIII slutligen utgör en mycket skissartad framställning om en makromodell av keynesiansk typ kompletterad med de i föregående kapitel härledda efterfrågefunktionerna för kontanter och värdepapper. Avsikten är att härleda multiplikatorer för de expansiva verkningarna på nationalinkomsten av operationer i öppna marknaden och av statsutgiftsökningar vid olika finansieringsformer — skattefinansiering, finansiering med lån hos allmänheten och i centralbanken. Kapitlet innehåller även en fortsättning på diskussionen i föregående kapitel om svårigheterna i samband med komparativt statisk analys av modeller innehållande variabler av beståndskaraktär.

KAPITEL II

INNEBÖRDEN AV INVESTERINGSKALKYLER

1. Problemställningen

Investeringar som serier av nettointäkter

Den följande diskussionen avser förutsättningarna för s. k. investeringskalkyler. Medan det har utvecklats en komplicerad analys byggd på sådana kalkyler inom de grenar av den ekonomiska teorin som behandlar optimalt handlande i intertemporal mening — har själva de grundläggande förutsättningarna för investeringskalkyler rönt förvånande liten uppmärksamhet. De flesta författare har helt enkelt tagit för givet att det måste finnas något »riktigt» kriterium, enligt vilket olika investeringsprojekt kan rangordnas efter lönsamhet — på samma sätt som i den tidlösa produktionsteorin vinstens storlek tjänar till kriterium för lönsamheten av olika produktionsmetoder. Eftersom olika investeringar innebär genomförande av tidskrävande produktionsprocesser, leder de till hela serier av kostnader och intäkter över längre tidrymder. Det har rått en viss oenighet om hur sådana serier skall rangordnas, dvs. vilka från betalningsserierna kalkylerade mått som skall ange deras lönsamhet, men det har i regel inte ifrågasatts att lönsamheten objektivt kan bestämmas genom kalkyler.[1]

Ordet 'investering' kan i det allmänna språkbruket beteckna själva arrangerandet av en hel tidskrävande produktionsprocess. Det kan också betyda förvärvandet av den fasta anläggning och de varulager som erfordras för produktionsprocessen. Häremot svarar vissa definitioner i den ekonomiska fackterminologin. I nationalräkenskapssammanhang betecknar 'investering' de penningutlägg som under en viss period görs för att förvärva anläggningar och varulager. Det sätt att uppfatta investeringen som intresserar mest i det aktuella sammanhanget, är att betrakta den som den serie av kostnader och intäkter vid olika tidpunkter, vilka produktionsprocessen ger upphov till under hela sin livstid, från det första utlägget i samband med konstruktionen av den för produktionen erforderliga anläggningen, till den sista ersättningen för anläggningens skrotvärde när verksamheten upphör.[2]

[1] Beträffande olika kriterier, se översiktsartikeln av F. A. Lutz, »The Criterion of Maximum Profits in the Theory of Investment», Quarterly Journal of Economics, 1945.

[2] Se K. E. Boulding, »The Theory of a Single Investment», Quarterly Journal of Economics, 1935, s. 475, samt »Time and Investment», Economica, 1936, s. 196.

I avsikt att förenkla bilden av de med en investering förbundna kostnaderna och intäkterna brukar man dela upp hela den tid verksamheten varar i ett antal lika långa perioder. För varje sådan period beräknas skillnaden mellan alla inom perioden fallande intäkter och kostnader. Den sålunda beräknade skillnaden kallas periodens nettointäkt. Inom varje period bortses från de verkliga betalningstidpunkterna för dess intäkter och kostnader — i det att samtliga betalningar antas äga rum vid periodsluten. Investeringen representeras således av en serie positiva och negativa nettointäkter vid sluten av ett antal lika långa perioder.

Investeringarna har hittills antagits ske som engagement i verkliga tidskrävande produktionsprocesser, varvid kostnaderna inträffat i samband med förvärvandet av byggnader, maskiner, råvaror, arbetskraft, kort sagt produktionsfaktorer av olika slag, och intäkterna i samband med försäljningen av egna produkter. Investeringarna kan naturligtvis även ha formen av finansiella placeringar i värdepapper av olika slag — såsom aktier och obligationer.[1]

Att i efterhand betrakta en investerings historia som en bestämd serie av nettointäkter erbjuder inga svårigheter. Emellertid är investeringskalkylerna av intresse när det gäller att på förhand avgöra vilket av flera alternativ som är det fördelaktigaste. Som det första steget i detta avgörande måste de till respektive alternativ hörande serierna av nettointäkter uppskattas. Sådana förhandsuppskattningar är alltid förbundna med viss osäkerhet.

Resultaten av tidskrävande produktionsprocesser är ofta beroende av förhållanden utanför investerarens kontroll, om vilka denne inte på förhand kan bilda sig någon säker uppfattning. Vidare är de framtida priserna på faktorer som erfordras för den löpande produktionen beroende av osäkra framtida marknadsförhållanden, liksom även priserna på de produkter som företaget kommer att sälja i framtiden.

När det gäller aktieplaceringar beror de framtida utdelningarna på samma osäkra förhållanden som resultaten av de verkliga produktionsprocesserna inom de företag, som aktierna utgör andelar i. Överväger man att sälja köpta aktier på börsen tillkommer den psykologiska osäkerheten om de övriga aktiespekulanternas beteende, som ju i huvudsak oberoende av produktionens verkliga räntabilitet bestämmer kurserna. För obligationernas del uppstår — när den emitterande institutionens återbetalningsförmåga står utom allt tvivel — ovissheten endast ifall man överväger att sälja före löptidens slut, eller ifall den emitterande institutionen förbehållit sig kon-

[1] För en tillämpning av investeringskalkyler på värdepapper se J. B. Williams, »The Theory of Investment Value», Amsterdam 1938, s. 53 ff.

verteringsrätt. I samtliga de fall då betalningarna är fixerade i penningbelopp tillkommer dessutom osäkerheten om det framtida penningvärdet.

När osäkerhet råder, får även investerarens egna planer för de framtida dispositionerna i samband med investeringsverksamheten en mycket komplicerad karaktär, beroende på att denne ej behöver binda sina dispositioner redan då investeringsbeslutet fattas. Alla planer för framtida dispositioner blir konditionella, dvs. de kommer att bero på den faktiska utvecklingen fram till de tidpunkter då de olika avgörandena måste träffas.

Dessa problem i samband med osäkerhet och planering skall behandlas längre fram, då det även skall ges referenser till arbeten, som upptar dem till särskild diskussion. Här skall endast nämnas de sätt att komma förbi svårigheterna som används i litteraturen om investeringskalkyler. En möjlighet härtill finner man i antagandet att varje investerare redan på förhand har en fullständig insikt rörande alla framtida förhållanden av någon betydelse för investeringsbeslutet. Alternativt hävdar man att investerarna tror sig ha fullständig kännedom om framtiden, utan att ha det i verkligheten. Svårigheten består i att förklara hur denna tro kan upprätthållas när förväntningarna ständigt visar sig slå fel. Det populäraste antagandet består i att investerarna, ehuru de är medvetna om alla verklighetens osäkerhetskällor, handlar som om ett investeringsalternativ gav upphov till en fullt säker serie av nettointäkter. Härvid betraktas ibland de olika periodernas nettointäkter i det säkra alternativet som riskfria ekvivalenter till motsvarande periods osäkra verkliga nettointäkt.[1]

Ett tänkt alternativ med en säker serie nettointäkter — som är likvärdigt med ett verkligt investeringsalternativ — skulle man kunna bestämma experimentellt genom att ställa investeraren inför en rad fingerade valsituationer. Däremot kan man inte entydigt bestämma någon *unik* serie av fullt säkra nettointäkter som är likvärdig med ett visst osäkert investeringsalternativ. Detta beror på att varje serie av fullt säkra nettointäkter omfattande minst två perioder teoretiskt har ett oändligt antal likvärdiga serier — även de fullt säkra — sådana att nettointäkten är gynnsammare under vissa perioder och ogynnsammare under de övriga. Det kan svårligen inläggas någon annan rimlig mening i tesen att investeraren vid valet mellan investeringar med ovissa resultat handlar på samma sätt som han skulle ha handlat ifall de olika investeringarna hade lett till säkra avkastningsserier än den att investeraren — för var och en av de olika investeringarna — står indifferent i valet mellan denna och motsvarande säkra avkastningsserie. Det finns ingen möjlighet att för varje särskild period bestämma en

[1] Se exempelvis Friedrich och Vera Lutz, »The Theory of Investment of the Firm», Princeton 1951, s. 179 ff.

unik riskfri ekvivalent till just dess osäkra avkastning och således erhålla en entydigt bestämd serie av riskfria nettointäkter, ty valet gäller serierna uppfattade som helheter och ej deras olika komponenter var för sig.

Tills vidare skall i den följande framställningen antas att den först nämnda hypotesen om fullständig insikt gäller. Denna hypotes leder på mikroplanet till de minsta logiska svårigheterna, samtidigt som den i regel är empiriskt helt orimlig. Vad som eftersträvas är emellertid den rent negativa slutsatsen att det inte ens under förutsättningen att varje alternativ leder till en fullt säker serie av nettointäkter annat än undantagsvis existerar objektiva kriterier för investeringsvalet. Den empiriska orimligheten i antagandet om fullständig insikt är därför ej något bekymmer för den följande framställningen.

Investeringskalkyler

De problem som behandlas i litteraturen om investeringskalkyler är av flera slag. Det kan gälla enkla fall som att bestämma den optimala lagringstiden för vin eller den optimala tiden mellan plantering och avverkning av skog[1]. Det kan vara fråga om att konstruera en generell teori för tidskrävande produktion av ett godtyckligt antal produkter med hjälp av ett likaså godtyckligt antal produktionsfaktorer där substitutionsmöjligheterna mellan enskilda faktorer och enskilda produkter är av det kontinuerliga slaget både inom varje period och mellan olika perioder.[2] Man kan också tänka sig att den med varje enskilt investeringsprojekt förbundna produktionsprocessen redan är optimalt planerad. Det som återstår att avgöra är valet mellan alternativa investeringar i olika slags produktion, samt val som gäller den optimala tidpunkten för igångsättning eller avbrytande av olika produktionsprocesser.[3]

Det är inte särskilt klart, vilka produktionsalternativ som skall hänföras till samma investering, och vilka som skall hänföras till olika investeringar. Det hela är en fråga om hur produktionsfunktionerna är formulerade. Vad som är väsentligt är emellertid att i samtliga fall — vare sig det gäller optimering av produktionsprocessen i samband med en enda investering eller det gäller val mellan flera olika investeringar — valet står mellan alter-

[1] Se exempelvis K. Wicksell, »Lectures on Political Economy», I, London 1935, s. 172 ff. K. E. Boulding, »The Theory of a Single Investment», Quarterly Journal of Economics, 1935, s. 475 ff., F. och V. Lutz, »The Theory of Investment of the Firm», Princeton 1951, s. 25, samt H. Dickson, »Forest Rotation—a Contribution to the Theory of the Optimum Investment Period», Weltwirtschaftliches Archiv, 1953, s. 205 ff.

[2] Se J. R. Hicks, »Value and Capital», Oxford 1946.

[3] Se E. Schneider, »Investering og rente», København 1944.

nativa serier av nettointäkter. Detsamma gäller även för valet mellan olika finansiella placeringsformer.

Den litteratur som har angivits utgör ett axplock ur den mikroekonomiska teorin för investeringskalkyler. Emellertid bygger somliga av de nämnda författarna själva, exempelvis Hicks liksom även andra författare, upp en makroekonomisk analys omkring investeringskalkylerna. Det mest typiska exemplet utgör Lindahl, vars hela konstruktion av en wickselliansk kumulativ process förutsätter hans speciella definitioner av inkomst- och kapitalbegreppen.[1] Överhuvud taget torde det närmast vara svårt att hitta läroböcker och vetenskapliga arbeten i nationalekonomi, som inte använder sig av investeringskalkyler i en eller annan form.

För att kunna jämföra helt olikartade serier av nettointäkter söker man i all denna litteratur mått som karakteriserar eller värderar de olika serierna och som kan kalkyleras från dem. Vissa mått är enbart karakteriserande såsom exempelvis i samband med försöket att utsträcka begreppet investeringsperiod, fullt naturligt i det enkla »point input — point output»-fallet, till investeringar med godtyckliga serier av nettointäkter.[2] Detsamma gäller den likartade definitionen av tidscentrum för en godtycklig intäkts- eller kostnadsserie.[3]

Mått som intresserar mera i det aktuella sammanhanget är sådana som värderar nettointäktsserierna och således tjänar som kriterier vid valet mellan flera olika alternativ. Ifall den ena av två nettointäktsserier innebär en gynnsammare nettointäkt under minst en period utan att innebära en ogynnsammare nettointäkt under någon av de övriga perioderna är det uppenbart att den investering, vars serie av nettointäkter har dessa egenskaper, betraktas som den fördelaktigaste. Man skulle också kunna säga att den ena serien i detta fall är »större» och den andra är »mindre». Analogt kan man säga att två serier är »lika stora» om deras nettointäkter är lika för varje särskild period. I dessa fall är det inte svårt att objektivt avgöra investeringsvalet. Emellertid måste det betraktas som ett undantag att sådana förhållanden består mellan de jämförda investeringarnas serier av nettointäkter. För de övriga fallen synes det i förstone naturligt att låta investeringsvalet bli beroende av investerarens subjektiva tidspreferenser, såsom Fisher och Hicks förutsätter i delar av sina arbeten.[4] Icke desto mindre söker även dessa bägge författare själva objektiva kriterier som uttrycker »vinsten» från tids-

---

[1] Se E. Lindahl, »Studies in the Theory of Money and Capital», New York 1939.

[2] Se J. R. Hicks, »Value and Capital», Oxford 1946, s. 186.

[3] Se K. E. Boulding, »Time and Investment», Economica, 1936, s. 196 ff.

[4] Se I. Fisher, »The Theory of Interest», New York 1930, samt J. R. Hicks, »Value and Capital», Oxford 1946.

krävande produktionsprocesser — så att valet mellan olika nettointäktsserier kan ske på objektiva indikationer även i de fall då den ena av två serier innebär gynnsammare nettointäkter för somliga perioder men ogynnsammare för de övriga.

Interna räntan som preferenskriterium

De kriterier som föreslagits är av varierande slag. En typ bygger på föreställningen att investeringarna på det hela taget ger tillbaka mer i intäkter än som erfordras i kostnader, varigenom fenomenet »ränta» uppstår. Det skulle gälla att uppmäta denna »interna ränta» för de jämförda alternativen, varefter man låter dess höjd bli utslagsgivande för vilket alternativ som skall väljas. Innebörden av begreppet intern ränta skulle kunna klargöras genom följande analogi. Vid slutet av varje period då nettointäkten i den serie som representerar en viss investering är negativ insättes ett motsvarande belopp på en bankräkning; liksom vid slutet av varje period då nettointäkten är positiv ett motsvarande belopp tas ut från denna. Det innestående beloppet växer med ränta på ränta. Interna räntan är då lika stor som den ränta, vilken skall betalas för att denna bankräkning, ifall tillgodohavandet har lytt på värdet noll före den första insättningen, återigen skall tömmas med det sista uttaget i serien. Vid tolkningen av denna definition uppstår flera problem. Eftersom det innestående beloppet skall växa med sammansatt ränta måste man först ange tidsintervallen emellan de tillfällen då räntan läggs till kapitalet. Dessa tidsintervall behöver ej nödvändigtvis överensstämma med de perioder som har använts vid beskrivningen av investeringens nettointäktsserie. Vidare måste det förutsättas att samma ränta skall betalas för skuld som för tillgodohavande, ifall det kunde tänkas att en skuldsättning till »banken» skulle uppstå under någon period. Slutligen är det möjligt att man ändå kan få flera numeriska värden på interna räntan av en given serie nettointäkter — nämligen om serien är mycket oregelbunden. Dessa definitionsproblem skall tills vidare försummas.[1] Tillräckligt klart framgår ändå, att den interna räntan är ett artificiellt kalkylbegrepp som definierats genom en dunkel analogi mellan å ena sidan investeringar med fixerade nettointäktsserier och å andra sidan bankplaceringar med valfrihet i serien av insättningar och uttag vid fixerad räntesats.[2]

---

[1] Se kap. IV : 2 nedan.

[2] Den interna räntan har i litteraturen även betecknats med de alternativa orden 'rate of return over cost' (Fisher), och 'marginal efficiency of capital' (Keynes). I samband med obligationer används ordet 'yield to maturity' eller på svenska 'effektiv ränta'.

För placeringar på bankräkning är ju räntan någonting som banken fastställer, medan tidsfördelningen av insättningar och uttag fritt kan bestämmas av placeraren själv inom en vid ram, vilken exempelvis kan bestå i att räkningen ej får lyda på negativt belopp eller överskrida visst värde, i bestämda krav på uppsägningstid för större uttag etc. Räntan uppfattas som ett pris betalat för en homogen nyttighet. Denna nyttighet är dispositionsrätten över kontanter för viss tid. När »priset» är givet, får placeraren själv bestämma de värden, över vilka han vill överlåta dispositionsrätten under olika perioder.

Investeringar i produktionsprocesser, eller placeringar i värdepapper såsom obligationer och aktier, ger inte någon sådan valfrihet. Vid frånvaron av osäkerhet, har dylika engagement antagits leda till bestämda serier av negativa och positiva nettointäkter. Man kan visserligen beräkna den interna räntesatsen på ovan angivet sätt, men investeraren har inte längre möjlighet att vid given räntesats själv bestämma fördelningen i tiden av de belopp över vilka han vill överlåta dispositionsrätten. Möjligheten till engagement i en investering innebär således en liknande option som erbjudandet att köpa en given varukvantitet för en viss penningsumma. Lika litet som det är självklart att man skall välja en av två alternativt erbjudna varukvantiteter bara för att priset per enhet råkar vara lägre, lika litet självklart bör det vara att välja ett visst investeringsalternativ bara för att effektiva räntan råkar vara högre. Annorlunda uttryckt, kan investeringarna, eftersom de representerar positiva och negativa betalningar fördelade i tiden på ett bestämt sätt, ej reduceras till den homogena nyttighetskategorin »dispositionsrätt över kontanter» med ett pris som har reell betydelse. Detta vore endast möjligt, ifall det under varje period skulle existera en marknad för de olika investeringarna, och de framtida priserna på dessa marknader skulle kunna förutses med säkerhet. Vid sådana fall av fullständig insikt skulle emellertid alla investeringskalkyler bli meningslösa, då det ju vore en trivial sak att välja investeringar under de olika perioderna.

Det försvar för interna räntan som kriterium vid investeringsval vilket har presterats hittills är också föga övertygande. Boulding hävdar exempelvis följande.

»It is clear that the investor will not want to maximize the net revenue of a particular year at the expense of the net revenue of other years—indeed, the way to maximize the net revenue is to liquidate the investment as soon as possible! It is also clear on reflection that it is not the total excess of positive over negative net revenues that is to be maximized; this would assume that the investor is indifferent as to the date at which these surplus net revenues occurred. It is in fact the 'rate of profit' in the classical terminology,

the rate of return over the whole period of the enterprise, that is the real measure of its profitability, and it is this which we have to maximize.»[1]

Således förefaller det som skulle man från förutsättningen att investeraren ej maximerar någon enskild periods nettointäkt och ej heller maximerar det sammanlagda värdet av alla periodernas nettointäkter kunna sluta sig till att det är interna räntan som skall maximeras. Det sagda skulle möjligen kunna gälla som bevis, ifall man kunde utgå från att ett av de tre diskuterade kriterierna nödvändigtvis måste kunna användas till objektiv rangordning av olika nettointäktsserier. Man har emellertid inte ens visat *att* det existerar ett objektivt sätt att rangordna alla godtyckliga serier av nettointäkter — och ännu mindre att rangordningen skulle bestämmas genom höjden av en viss periods nettointäkt, eller summan av nettointäkterna eller interna räntan. Det förhåller sig till och med så att bland de tre nämnda maximeringsprocedurerna maximeringen av interna räntan svarar mot en preferensrelation mellan nettointäktsserierna som ej är transitiv. Skälet härtill är följande. Interna räntefaktorn erhålles som lösning av polynomiala ekvationer vilkas koefficienter utgöras av de olika nettointäkterna i serien motsvarande en viss investering. Det finns ingenting som hindrar att en sådan ekvation kan ha flera olika lösningar, vilket betyder att en viss serie av nettointäkter kan ge flera olika värden på interna räntan. Annorlunda uttryckt, betyder det att vissa investeringar, när interna räntan bestämmer rangordningen, svarar mot flera preferensnivåer. Speciellt gäller att alternativet, då man inte väljer någon investering, leder till precis varje tänkbart värde på interna räntan, beroende på att den polynomiala ekvationen satisfieras för varje godtyckligt värde på den obekanta variabeln när alla koefficienterna är noll. Det sagda betyder att investeringar som ej är likvärdiga, beroende på att de avkastar olika hög intern ränta, var för sig kan vara likvärdiga med ett och samma investeringsalternativ, för vilket flera värden på interna räntan kan beräknas. Detta strider emellertid klart mot antagandet om transitivitet som brukar göras för alla rationella preferenssystem.

En annan komplikation som inträder under Bouldings förutsättningar är följande. Antag att preferensordningen ej skall användas till att rangordna alternativa investeringar, utan i stället till att determinera en optimal serie bankinsättningar och uttag när in- och utlåning kan ske till en och samma konstanta bankränta. Varje möjlig serie av bankinsättningar och uttag avkastar nu samma »interna ränta». Alternativt uttryckt gäller valet alla de

[1] Se K. E. Boulding, »The Theory of a Single Investment», The Quarterly Journal of Economics, 1935, s. 482. Liknande åsikter framförs av F. H. Knight, »Capital, Time and the Interest Rate», Economica, 1934, s. 257 ff.

olika »investeringar» som avkastar en viss »intern ränta». Emellertid skulle »investeringar» med samma »interna ränta» anses likvärdiga. Resultatet av det hela blir att budgetrestriktionen helt sammanfaller med ett indifferenslocus varigenom samtliga alternativ blir likvärdiga. Ett preferenssystem av den typ Boulding förutsätter kan därför ej determinera någon optimal serie av bankinsättningar och uttag, ty det är likgiltigt för placeraren som maximerar intern ränta hur mycket han lånar in eller lånar ut under olika perioder, ifall detta ej påverkar bankräntans höjd.

Kapitalvärdet som preferenskriterium

En serie av nettointäkter kan ur preferenssynpunkt anses ha samma kataktär som en kollektion av fysiskt olika varuslag. De olika »varorna» motsvaras i så fall av penningbelopp lokaliserade till olika tidsperioder. Denna typ av analogi leder fram till det andra föreslagna huvudkriteriet för objektiv rangordning av nettointäktsserier. Liksom heterogena varukollektioner kan värderas med hjälp av de olika varornas marknadspriser, på samma sätt skulle man kunna tänkas värdera serier av nettointäkter. När man värderar en kollektion av fysiskt olika varor sker det i regel genom att man beräknar dess ekvivalent i pengar. Lika gärna hade man emellertid kunnat beräkna ekvivalenten som en kvantitet av någon bland de olika varuslag vilka själva ingår i kollektionen. Värderingen skulle då naturligtvis inte ha skett med hjälp av de olika varornas penningpriser, utan i stället med hjälp av deras respektive bytesförhållanden gentemot det varuslag i vilket kollektionens värde uttryckts. Därigenom skulle detta värde ha kommit att bero på vilket varuslag man valt som »numéraire». På detta sätt förfar man vid beräkning av en nettointäktsseries kapitalvärde, vilket ju uttrycker ekvivalenten till hela serien såsom en penningsumma lokaliserad till någon bestämd period. Kapitalvärdet måste hänföras till någon särskild period, liksom varan i vilken den heterogena kollektionen värderas särskilt måste anges. Det räcker alltså ej med att säga att värderingen skall ske i pengar, ty alla de olika »varorna» är penningbelopp och skiljer sig åt endast i fråga om den period till vilken de hör. Vanligt är att kalkylera kapitalvärdet till det tillfälle då investeringsverksamheten anses börja, varvid det ges namnet nuvärde. Bytesförhållandena för de senare periodernas nettointäkter gentemot nettointäkten för den period som har föregått den första perioden kallas diskonteringsfaktorer. Den investering bland flera alternativ som har det högsta kapitalvärdet antas bli vald. Därvid bör observeras att kapitalvärdet för samtliga jämförda alternativ bör vara beräknat till en och samma tidpunkt. I annat fall skulle jämförelsen vara likvärdig med en

jämförelse av alternativa varukollektioners ekvivalenter uttryckta som kvantiteter av olika varuslag.

Skälet till att man skulle välja en nettointäktsserie med högsta kapitalvärde kan man även finna genom referens till fallet med heterogena varukollektioner. Ifall det existerar marknader för vart och ett av de olika varuslagen där dessa kan säljas och köpas fritt till konstanta priser, så är det alltid rimligt att välja den kollektion som motsvarar den största kvantiteten av den vara i vilken man har valt att göra värderingarna. Det är därvid likgiltigt vilken vara man har valt för detta ändamål, ty när en viss kollektion svarar mot den största kvantiteten i ett visst varuslag, gäller detsamma även vid värdering i de övriga varuslagen.

Anledningen till att i ett sådant fall föredra kollektioner med högre värde, är uppenbar. Visserligen önskar man i regel ej endast erhålla så mycket som möjligt av den vara i vilken värderingen sker, men vilka preferenser för olika varukollektioner man än tillfredsställer kan man byta sig till objektivt fördelaktigare kollektioner ifall man ursprungligen förfogar över en större kvantitet av den vara i vilken värderingen sker. En objektivt fördelaktigare kollektion antas därvid vara en sådan som innehåller mera av åtminstone ett varuslag utan att innehålla mindre av de övriga. Det sagda gäller emellertid endast om alla önskade varubyten verkligen kan utföras vid konstanta bytesförhållanden.

Detsamma kan sägas vid val mellan olika nettointäktsserier; dvs. att kapitalvärdena måste uttrycka de olika seriernas fördelaktighet, när in- och utlåning fritt kan ske vid en för varje period given konstant räntesats. I verkligheten är emellertid dessa förutsättningar knappast uppfyllda. På marknaderna för köp och försäljningar av löften om framtida penningsummor varierar priserna beroende på om man är köpare eller säljare och beroende på hur mycket man vill köpa eller sälja. I förenklade teoretiska modeller, där endast en räntesats förutsätts existera för varje period, verkar förutsättningen att kapitalvärdet skall maximeras fullt rimlig — en slutsats som inte utan vidare kan antas gälla under mera realistiska förutsättningar. Det sagda betyder även att kapitalvärdesberäkningarna måste ske med hjälp av räntesatser på verkliga marknader som investeraren antas ha tillgång till. Det duger således ej att göra beräkningarna med något slags subjektiva räntesatser som investeraren skulle »fordra».

Det kan nu vara lämpligt att se på några olika författares motiveringar till att förutsätta maximering av nuvärdet. Hicks önskar rangordna alternativa planer för arrangerandet av en tidskrävande produktionsprocess, vilka förutsättes leda till olika på förhand kända serier av nettointäkter. Det skulle enligt hans mening inte vara svårt att rangordna sådana serier

ens då den ena av två jämförda serier leder till högre nettointäkt under vissa perioder men till lägre nettointäkt under andra. Man skulle endast ha att välja serien med det högsta nuvärdet. Som motivering anför Hicks följande:[1]

»If we assume that the entrepreneur can borrow and lend freely at given market rates, and that he is in business in order to get an income from it, then the preferred production plan must be that whose present value is the greatest.»

För att kunna tolka innebörden av den implicerade handlingsregeln måste man veta vad Hicks avser med »income». Enligt definitionerna i samma arbete kan inkomsten kalkyleras som den konstanta annuiteten i en »standardiserad» nettointäktsserie, till vilken den verkliga, oregelbundna serien av nettointäkter kan transformeras genom lämplig in- och utlåning.[2]

Handlingsregeln att välja en serie nettointäkter vars standardiserade, för varje period konstanta, annuitet är den största möjliga svarar mot ett preferenssystem för nettointäktsserier sådant att en bättre serie endast kan uppnås genom att samtliga perioders nettointäkter höjs, men ej genom partiella höjningar av enskilda perioders nettointäkter vid oförändrade värden för de övriga.

Detta påstående kan förefalla något paradoxalt. Man kan tycka att en partiell höjning av en enskild periods nettointäkt alltid kan omvandlas till en likformig höjning av alla nettointäkterna något som ju i sin tur måste leda till en fördelaktigare situation. Emellertid diskuterar man vid denna tankegång förskjutningar av det möjlighetslocus inom vilket det gäller att välja den fördelaktigaste serien av nettointäkter. Vad vi har uttalat oss om är någonting helt annat, nämligen arten av den preferensordning enligt vilken den fördelaktigaste nettointäktsserien väljs ut. Att man inom varje *givet* möjlighetslocus utväljer den nettointäktsserie vars standardiserade annuitet är maximal, betyder detsamma som att varje *faktisk* nettointäktsserie genom lämpliga transformationer kommer att förändras till en *optimal* serie vars nettointäkter för alla perioder är lika stora. Men den omständigheten att den nämnda transformationen alltid görs oberoende av de räntesatser till vilka transformationerna kan genomföras betyder i sin tur detsamma som att de olika indifferensloci ej tillåter några substitutioner mellan nettointäkterna för skilda perioder eller, annorlunda uttryckt, att partiella höjningar av en enskild periods nettointäkt ej leder till någon högre preferensnivå.

Antagandet om att dylikt preferenssystem är således mycket speciellt, men det väsentliga är att eftersom Hicks har antagit entydiga och givna

[1] J. R. Hicks, »Value and Capital», Oxford 1946, s. 195.

[2] Ibid., s. 172 ff.

räntesatser för varje period, samma slutsatser skulle erhållas även vid alla andra rationella preferenssystem.

Kapitalvärdet utgör även grunden för Lindahls analys. Denne definierar nämligen sitt inkomstbegrepp för en enskild individ som det högsta värde denne kan konsumera under en viss period, utan att minska det till nuet diskonterade kapitalvärdet av alla sina förväntade nettointäkter. Bland dessa inbegrips ej bara nettointäkterna från sådan investeringsverksamhet, som individen engagerat sig i, utan även de förväntade ersättningarna för eget arbete. Inkomsten under en viss period blir således lika med den löpande räntan på alla individen tillhöriga kapitalvärden. Lindahls egen argumentation lyder:[1]

»The definition of the income of an individual as the current interest on all capital values belonging to him, including the capital value of his own activities, is comparatively easy to apply to external capital resources, including land, but not labour. The capital values here referred to must be regarded as estimates by the owner on the bases of his anticipation of future yields. In this calculation, on account of uncertainty factors every expectation of future returns must be written down with the due regard to the probability attaching to the yields as estimated by the individual, and to his own valuation of these probabilities. To obtain the capital value each anticipated yield must be discounted at the interest rates that are valid for the particular individual up to the time in question, and these discounted values must be added together. The income will be the short term interest on this capital value.

In the case of income from human labour, however, this definition differs from the traditional view, since it is not customary to calculate a capital value for such labour ... Nevertheless it is possible, and from some points of view appropriate, to employ similar or analogous reasoning to the analysis of the income of labour.»

Denna framställning är typisk såtillvida som det helt enkelt tas för givet att det för individen i fråga finns »valid interest rates» med hjälp av vilka kapitalvärdena kan kalkyleras. Någon angivelse av att dessa räntesatser skulle vara faktiska marknadsräntor till vilka den diskuterade individen kan låna in och låna ut obegränsade värden har inte gjorts. Det kan förhålla sig så, men de olika kalkylräntorna kan även vara subjektivt bestämda uttryck för den önskade förräntningen. I själva verket pendlar flertalet författare mellan dessa bägge uppfattningar, som ingalunda har samma innebörd. I det ena fallet innebär kapitalvärdesberäkningen en värdering till

[1] E. Lindahl, »Studies in the Theory of Money and Capital», New York 1939, s. 145.

givna, konstanta »marknadspriser». I det andra fallet har en speciell form på preferenssystemet antagits, nämligen sådan där indifferensloci är parallella hyperplan.

Det har emellertid ej angivits varför sådana förutsättningar rörande preferenssystemets natur i sig skulle vara plausibla. Ifall man tar en önskad förräntning till utgångspunkt, förefaller det tvärtom naturligast att återgå till Bouldings förutsättningar om maximering av interna räntan med ett irrationellt preferenssystem som resultat. Detta skulle emellertid som bekant leda till helt andra val än maximering av ett kapitalvärde kalkylerat med hjälp av den önskade förräntningen, ty de bägge sätten att rangordna är ej likvärdiga.[1]

En komplikation, som uppstår vid en rangordning där kapitalvärdet maximeras, sammanhänger med att de subjektivt bestämda kvoterna för marginella substitutioner mellan olika perioders nettointäkter är oberoende av den faktiska serien av nettointäkter vid vilken marginella substitutioner övervägs. Antar man att interna räntan används, inte bara för att rangordna olika investeringar, utan även för sådana serier av bankinsättningar och uttag som kan ske till en konstant räntesats, kommer så snart »rate of time preference» avviker från bankräntan denna diskrepans att bestå oberoende av hur mycket som lånas eller lånas ut.[2] Av det sagda följer emellertid, att omfattningen för lån och utlåning vid konstant bankränta under antagande att indifferensloci är parallella hyperplan överhuvudtaget ej kan determineras av preferenssystemet.

Ett gott exempel på ett arbete, vilket pendlar mellan uppfattningen av kalkylräntan som önskad förräntning och som faktisk marknadsränta, utgör Schneiders framställning.[3] På ett ställe framhåller författaren att investeringar i förvärvssyfte genomförs i avsikt att erhålla intäkter, vilka innebär en återbetalning av nedlagda kostnader, förräntade med en räntesats som av investeraren anses vara tillräckligt hög.[4] Senare anknyts kalkylräntan

[1] Se F. Lutz, »The Criterion of Maximum Profits in the Theory of Investment», The Quarterly Journal of Economics, 1945.

[2] Fishers »rate of time preference» är helt enkelt värdet av den tidigare nämnda marginella substitutionskvoten minskad med ett, och uttrycker alltså en subjektiv räntesats, sådan att man önskar låna, när den är högre än bankräntan, och låna ut, när den är lägre än bankräntan. Genom att »rate of time preference» hos Fisher antas stiga, ju mer man lånar ut, och falla, ju mer man lånar, kommer den avvikelse, som motiverar lån eller utlåning, så småningom att upphöra, varigenom en optimal serie av bankinsättningar och uttag determineras av villkoret om likhet mellan bankränta och »rate of time preference». Se I. Fisher, »The Theory of Interest», New York 1930, s. 253–55.

[3] E. Schneider, »Investering og rente», København 1944.

[4] Ibid., s. 27.

till faktiska marknadsförhållanden. När finansieringen av investeringsverksamheten sker med hjälp av upplånat kapital, skulle det vara rimligt att låta den faktiska lånekostnaden bestämma den räntesats med hjälp av vilken investeringskalkylerna görs. Ifall verksamheten finansieras med eget kapital, skulle i stället »opportunity cost» för någon typisk alternativ användning av det egna kapitalet bestämma kalkylräntan. Om slutligen finansieringen göres med såväl lånekapital som eget kapital, skulle ett vägt medeltal av in- och utlåningsräntorna kunna användas som kalkylränta.[1]

Kapitalvärdesberäkningarna förefaller i det senare alternativet närmast vara ett slags värderingar till faktiska »marknadspsriser», även om Schneider ingalunda har uppgivit föreställningen av kalkylräntan som en subjektivt bestämd »rate of time preference» vilken är densamma för varje period och oberoende av nettointäktsserien. Det sistnämnda är en exakt, men något oväntad, beskrivning av innebörden i en subjektiv kalkylränta vid vilken investeraren väljer det maximala kapitalvärdet bland serierna av nettointäkter. Dessutom skulle det kunna tänkas att resonemangen kring kalkylräntan hos Schneider vore uttryck för att investeraren sökte högsta interna ränta som självändamål, något som emellertid skulle strida mot antagandet att kapitalvärdet skall maximeras. Som bekant förändras ju ordningsföljden bland ett antal nettointäktsserier, när de ordnas efter storleken av sina respektive kapitalvärden, vid ändringar i kalkylräntans höjd, medan ordningsföljden bland dem, när de ordnas efter höjden av sina interna räntor, är oberoende av kalkylräntan. Detta förhållande är Schneider väl medveten om, varför hög intern ränta ej kan förutsättas vara ett självändamål. De bägge förstnämnda tolkningsmöjligheterna kvarstår därvid. Kapitalvärdesmaximeringen kan således antingen tyda på att kalkylräntan är en faktisk marknadsränta, eller på att den är en subjektiv »rate of time preference». Skulle emellertid kalkylräntan vara »rate of time preference», är det svårt att förstå varför den skulle bero på de faktiska marknadsräntorna, vilket ju Schneider förutsätter. Det mest motsägelsefria sättet att uppfatta kapitalvärdet, innebär således att detta uttrycker en marknadsvärdering.

Intressant är att Schneider ej förutsätter existensen av entydiga marknadsräntor för varje period. I varje fall antas in- och utlåningsräntorna ha olika höjd. Analogin mellan nettointäktsserier och heterogena varukollektioner ger vid handen att det här är fråga om marknader där varupriserna beror på de av kollektionens ägare utbjudna och efterfrågade mängderna. Men eftersom priserna är variabla kan värdeekvivalenten till den heterogena kollektionen, uttryckt som en kvantitet av något särskilt varuslag, endast

[1] Ibid., s. 67.

beräknas med hjälp av ett slags genomsnittspriser vilka själva varierar med de köpta respektive sålda mängderna av olika varor. Det är emellertid alls inte lika självklart att man skall söka den kollektion för vilken en sådan värdeekvivalent är maximal såsom det är när varupriserna är konstanta. Det sagda gäller även för de kollektioner, där de olika varorna utgörs av tidslokaliserade nettointäkter.

I sådana fall är det tvivelaktigt, huruvida någon objektiv rangordning alls kan uppställas mellan nettointäktsserierna på grundval av deras »marknadsvärden». Schneider förefaller att själv ha varit medveten om denna svårighet. Han hävdar nämligen att relevanta jämförelser mellan investeringar, som binder olika stora värden, i regel ej kan göras på grundval av kapitalvärdena. Den investering vilken binder ett mindre kapital skulle nämligen kunna kompletteras med utlåning av de överskjutande medlen, eller alternativt skulle den investering som binder mera kapital få kombineras med upplåning.

Den fulla konsekvensen av det hela, som Schneider emellertid ej själv har dragit, blir att två olika investeringar endast är objektivt jämförbara, om den enas serie av nettointäkter innehåller ett högre värde under minst en period, utan att innehålla ett lägre värde för någon av de övriga perioderna. Två olika betalningsserier, som ej uppfyller den angivna förutsättningen för jämförbarhet, kan emellertid ändå jämföras på grundval av kapitalvärdenas höjd, ifall in- och utlåning fritt kan ske till kalkylräntan.[1]

Kritiken mot användning av investeringskalkyler

Vid sidan av dessa framställningar om investeringskalkyler, finns ett fåtal författare som har ställt sig kritiska till själva föreställningen att det existerar objektiva investeringskalkyler. Sålunda framhåller Hirschleifer att investeringsvalet ej kan avgöras utan kännedom om investerarens subjektiva preferensordning för nettointäktsserier. Om de traditionella framställningarna säger denne:

»Their common error lay in searching for a rule or formula which would indicate optimal investment decisions independently of consumption decisions. No such search can succeed if Fishers analysis is sound which regards investment as not an end in itself but rather a process for distributing consumption over time.»[2]

Dessa kritiska synpunkter har emellertid framförts långt tidigare. Egentligen har ju Fisher själv klart angivit förutsättningarna för investerings-

[1] Ibid., s. 36.

[2] Se J. Hirschleifer, »On the Theory of Optimal Investment Decision», The Journal of Political Economy, 1958, s. 329.

kalkyler samt även begränsat deras giltighet till det fall då kvantitativt obegränsad in- och utlåning kan göras till en och samma räntesats. Det sagda framgår av följande citat:

»Since, therefore, any time shape may be transformed into any other time shape, nobody need be deterred from selecting an income because of its time shape, but everyone may choose an income exclusively on the basis of maximum present value. It will then happen that this income, as finally transformed, will be larger than it would have been if he had chosen some other time shape.

All this is true under the assumptions ... that after the most valuable option has been chosen, you can borrow and lend or buy and sell *ad libitum* ... If this assumption is not true, if a person were cut off from a free loan market, the choice among optional income streams might or might not fall upon that one having maximum present value, depending on the other circumstances involved, particularly his preferences as regards time shape.»[1]

Det är alldeles tydligt att Fisher tänker sig kapitalvärdet som en ren marknadsvärdering av en serie nettointäkter, vilket det gäller att maximera när man vid fri in- och utlåning alltid från en serie med högre marknadsvärde kan uppnå en fördelaktigare transformerad serie av nettointäkter — och det oberoende av de preferenser för konsumtionsfördelningen i tiden som man söker tillfredsställa.

Även Samuelson betraktar kapitalvärdet som en faktisk marknadsvärdering och upprepar Fischers argument för kapitalvärdesmaximering i de fall då in- och utlåning kan ske obegränsat till en sammanfallande räntesats. Hans framställning lyder på följande sätt.

»Given an interest rate at which all can lend or borrow each entrepreneur will select that value of the variable under his control which maximizes the present value of the investment account, the present value being computed by capitalization of the income stream at the market rate of interest. This follows from the fact that under our ideal conditions, the investment account necessarily has a market value equal to the capitalized value, and is equivalent to an equal money sum, and a larger initial sum of money is always preferred to a smaller one.»[2]

Vad som inträffar i de fall då förutsättningarna om fri in- och utlåning ej är uppfyllda blir man inte upplyst om i Fishers eller Samuelsons framställningar. Däremot har Hart i en av Palander inspirerad framställning grundligare diskuterat fallet då räntesatsens höjd beror på om man sparar eller

[1] Se I. Fisher, »The Theory of Interest», New York 1930, s. 138 ff.

[2] Se P. A. Samuelson, »Some Aspects of the Pure Theory of Capital», The Quarterly Journal of Economics 1936–37, s. 482.

lånar och på de sparade eller lånade beloppens storlek.[1] Den kalkylränta som skulle vara relevant för investeringskalkylerna vore då inte den genomsnittliga, utan i stället den — i regel avvikande — marginella räntesatsen för ökningar av in- eller utlåningen. Eftersom olika investeringar svarar mot olika marginella räntesatser skulle de med sina egna marginella räntesatser kalkylerade kapitalvärdena för olika investeringar ej vara fullt jämförbara. Även om lånevillkoren för lika belopp vore oberoende av vilken investering som väljs skulle de för olika investeringar marginella räntesatserna avvika beroende på att olika investeringar medförde olika stor in- och utlåning. Om emellertid inget av två investeringsalternativ i jämförelse med det andra skulle ge högre kapitalvärde för beräkning med bägge investeringarnas marginella räntesatser skulle man inte kunna lösa problemet att välja investering utan en slutlig appell till de subjektiva preferenserna för konsumtionens fördelning över tiden.

Resonemangets begränsning ligger i att de marginella räntesatserna och följaktligen även in- och utlåningsserierna vid de olika investeringarna antas vara kända. Dessa kan man emellertid endast bestämma om man vid sidan om investeringarna och villkoren för in- och utlåning även känner de subjektiva preferenserna för konsumtionens fördelning i tiden. I stället skulle man vilja veta vad som kan sägas generellt utan kännedom om dessa subjektiva preferenser.

Harts formuleringar är emellertid så vaga att de knappast torde tåla en närmare undersökning. I ett opublicerat manuskript har Dickson försökt att tolka in en mera precis mening i Harts framställning. Dicksons arbete innehåller därmed den hittills fullständigaste analysen av grunderna för investeringskalkyler.[2]

Dicksons analys är emellertid begränsad till en speciell typ av förutsättningar — innebärande att investeraren eftersträvar en alldeles bestämd serie av under olika perioder konsumerade belopp samt därutöver endast önskar maximera den efter alla dessa perioder kvarstående förmögenheten. Ett dylikt handlande svarar mot en ganska speciell preferensordning mellan konsumtionsfördelningar i tiden. Liksom i det preferenssystem, vilket svarar

[1] Se A. G. Hart, »Anticipations, Business Planning and the Cycle», The Quarterly Journal of Economics 1936–37, s. 283. Enligt not på samma sida säger sig Hart ha erhållit de kritiska synpunkterna från T. Palander.

[2] Se H. Dickson, »Reflexioner kring några nyare planerings- och kapitalteorier», Stockholm 1941 (stencilerat manuskript). Synpunkterna rörande investeringskalkylernas begränsade användbarhet som framförts av Fisher, Palander och Hart återfinnas även hos I. Svennilson, »Ekonomisk planering», Uppsala 1938, s. 146 samt s. 154 (not). Från 40-talets början synes reservationerna mot investeringskalkyler helt ha försvunnit från litteraturen för att återigen upplivas av Hirschleifer i den ovan nämnda artikeln.

mot antagandet att man söker maximera en standardiserad annuitet, kommer substitutionsmöjligheter att saknas i det med Dicksons antaganden överensstämmande preferenssystemet. För detta system gäller vidare att gränsnyttan av partiella tillskott till en enskild periods konsumtion har värdet noll för samtliga perioder utom den sista. Man skulle i stället önska slutsatser rörande investeringskalkylernas användbarhet vid preferenssystem vilka överensstämmer med Fishers antaganden om begränsade kontinuerliga substitutionsmöjligheter där samtliga gränsnyttor är positiva och där indifferensloci är konvexa mot origo.

Objektiva preferensrelationer

Oberörda av dessa kritiska synpunkter har emellertid traditionellt upplagda investeringskalkyler fortfarit att spela stor roll inom ekonomisk teori.

Kritiken synes kontrastera skarpt mot åsikterna i de vanliga läroböckerna över investeringskalkyler, vilka gör gällande att kapitalvärdeskriteriet eller internräntekriteriet skulle vara objektivt riktiga handlingsregler medan andra i praktiken använda kriterier, såsom önskan att få tillbaka så mycket som möjligt av inköpskostnaden under viss tid, skulle vara grova approximationer. Enligt Hirschleifer existerar inga objektiva kriterier för investeringsbeslut oberoende av tidspreferenserna för konsumtionen. Vi skall i det följande försöka en medelväg, dvs. använda en sådan analys som rekommenderas av Hirschleifer, men vi skall sedan explicit undersöka i dess egna termer under vilka förhållanden investeringsbeslut verkligen kan fattas på objektiva indikationer och oberoende av konsumtionsbesluten. Vi skall även undersöka om sådana beslut på objektiva indikationer kan ske genom något av de i investeringsteorin rekommenderade kriterierna.

Vi utgår från att varje investerare har en fullständig subjektiv rangordning för olika serier av nettointäkter. Vi förutsätter att en serie alltid måste föredras framför en annan, om den under minst en period innebär en gynnsammare, dvs. högre positiv eller lägre negativ, nettointäkt utan att under någon av de övriga perioderna innebära en ogynnsammare nettointäkt. Om detta gäller två serier av nettointäkter skall vi säga att en objektiv preferensrelation råder dem emellan. Att i detta fall interna räntan är högre för den serie som är objektivt fördelaktigare, är en trivialitet. Däremot behöver vid de icke-triviala fallen motsatsen ej gälla, dvs. att en serie med högre intern ränta alltid skulle vara att föredra när den innebär gynnsammare nettointäkter under somliga perioder och ogynnsammare under de övriga.

Placerarna har emellertid i verkligheten inte endast de fixerade nettointäktsserier som de olika investeringarna representerar att tillgå, utan dessa serier kan transformeras på olika sätt — exempelvis genom lån i eller

utlåning till en bank. Valet gäller då inte de fixerade serierna som sådana, utan snarare dem inklusive alla deras respektive möjliga transformationer. Transformationsmöjligheterna kan nu tänkas vara sådana, att det för varje transformerad serie av nettointäkter som valet av en viss investering möjliggör, finns transformerade serier möjliggjorda genom valet av en annan investering vilka är objektivt fördelaktigare enligt den relation vi ovan definierade. Ett sådant förhållande kallar vi en objektiv preferensrelation mellan investeringar. När läroböckerna i investeringskalkyler rekommenderar interna räntan som valkriterium, måste de i själva verket göra ett implicit antagande om att transformationsmöjligheterna är sådana, att en objektiv preferensordning gäller mellan de olika investeringarnas mängder av fixa och transformerade nettointäktsserier, och att denna objektiva preferensordning vidare kan anges genom storleken av investeringarnas kapitalvärden. Det sagda stämmer överens med vad som tidigare har sagts om de fall då marknadsvärdena av heterogena varukollektioner objektivt uttrycker deras fördelaktighet. Det kan även sägas att den objektiva preferensrelationen mellan investeringar uttrycker ett slags Pareto-optimalitet, då de tidslokaliserade nettointäkterna för en person (när man icke känner dennes preferensfunktion) är lika litet jämförbara som olika personers intäkter under samma tid.

Emellertid synes det riskabelt att implicit göra antagandet att objektiva preferensrelationer råder, ty härigenom kan man förledas tro, att investeringskalkyler alltid har någon objektiv mening oberoende av de subjektiva preferenserna, och sålunda tillämpa dem mekaniskt även i fall då det är illegitimt. Vi skall därför explicit undersöka förhållandena vid några olika typer av transformationsmöjligheter i stället för att dölja problemställningen i en oklarhet om vad kalkylräntan egentligen betyder.

Detta tillvägagångssätt fordrar mycken försiktighet, varför vi kommer att tillämpa formaliserade logiska resonemang. Dessa kan ibland synas onödigt komplicerade. En ersättning av de formella härledningarna med intuitiva resonemang skulle emellertid vara lika litet bindande som de ovan kritiserade motiveringarna för investeringskalkyler. I själva verket är det just det intuitiva resonerandet som har lett till den rådande oklarheten på detta område.

Appendix

I detta appendix ges för tvådimensionella konsumtionsvektorer grafiska illustrationer till de olika typer av preferenssystem vilka diskuterats i det föregående samt till de objektiva preferensrelationer vilka definierats ovan.

Fall a): Detta fall svarar mot den typ av preferensordning där interna

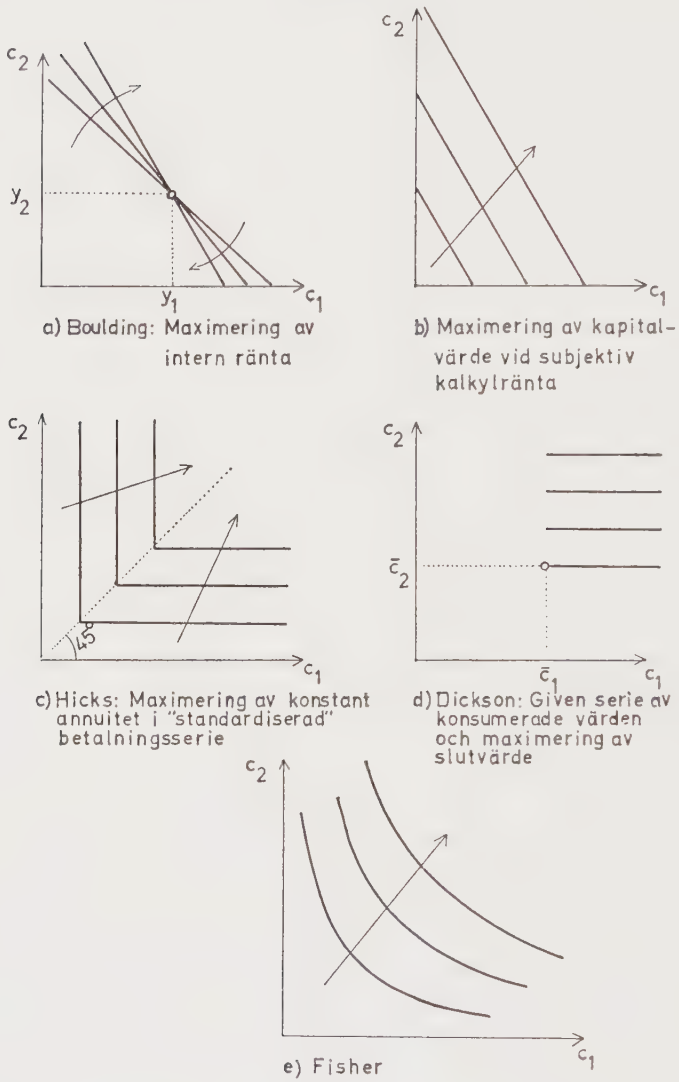


Fig. 1.

räntan uttrycker fördelaktigheten av olika investeringar. Alla de differensvektorer mellan å ena sidan konsumtionsvektorer och å den andra den givna inkomstvektorn vilka leder till en given intern ränta ligger på en rät linje genom den punkt som motsvarar inkomstvektorn. Den räta linjens lutning har ett numeriskt värde som anges av interna räntefaktorn. Med interna räntesatser som har högre värden än $-100\,\%$ kan man följaktligen rang-

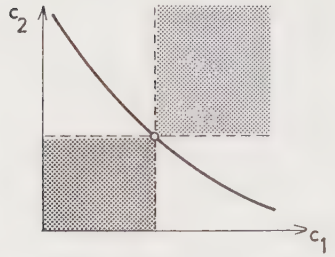
ordna alla de konsumtionsvektorer vilka ej enligt den givna definitionen objektivt sett är mer eller mindre fördelaktiga än inkomstvektorn. Observera att de räntesatser vilka är lägre än −100 % skulle innebära att skulder under en period förvandlas till tillgodohavanden under nästa och vice versa. Eftersom denna med hjälp av interna räntan bildade ofullständiga preferensordning är beroende av inkomstvektorn, kommer den också att förändras när inkomstvektorn förändras. *Följaktligen kan investeraren i detta fall över huvud taget inte ha någon given preferensordning för konsumtionsvektorer. Vidare skär preferensordningens indifferenskurvor varandra så att sinsemellan icke likvärdiga konsumtionsvektorer kan var för sig vara likvärdiga med en och samma konsumtionsvektor.* För att en sådan preferensordning skall vara rimlig måste man åtminstone dela upp figuren i den del vilken ligger till vänster om skärningspunkten — där hög intern ränta eftersträvas — och i den del vilken ligger till höger om skärningspunkten — där låg intern ränta eftersträvas. Den senare delen svarar ju också snarare mot låneverksamhet än mot investeringar.

Fall b): Detta fall svarar mot den typ av preferensordning där sådana investeringar och konsumtionsvektorer eftersträvas som har maximalt kapitalvärde kalkylerat med en given subjektiv kalkylränta. Därvid är den av Fisher definierade »rate of time preference» konstant och oföränderlig dels utmed varje indifferenskurva och dels mellan olika indifferenskurvor. Indifferenskurvorna blir således parallella räta linjer. *Preferensordningen medför egendomliga resultat i den mån man med hjälp av denna skall bestämma ett optimalt värde för banklån eller banksparande vilka i obegränsad utsträckning kan göras till en och samma räntesats. Ty antingen blir budgetlinjen — som då även är rätlinjig — parallell med indifferenskurvorna — och då är det likgiltigt hur mycket som lånas eller sparas. Eller också är budgetlinjen ej parallell med indifferenskurvorna — och då kvarstår med oförändrad styrka incitamentet att låna eller spara ytterligare hur mycket man än har lånat eller sparat.*

Fall c): Detta fall svarar mot Hicks antagande att man söker maximera en konstant annuitet. De optimala konsumtionsvektorerna är följaktligen sådana att konsumtionen är lika stor under varje period och dessa optimala vektorer ligger således på en rät linje genom origo med 45° lutning. Några substitutionsmöjligheter finnes ej, varför preferensnivån endast kan ökas genom samtidig ökning av samtliga perioders konsumtionsvärden.

Fall d): Några substitutionsmöjligheter finns inte heller enligt Dicksons antaganden enligt vilka en bestämd konsumtionsvektor skall eftersträvas.

Fall e): Som jämförelse ges indifferenskurvor av den vanliga typen vilka används av Fisher.

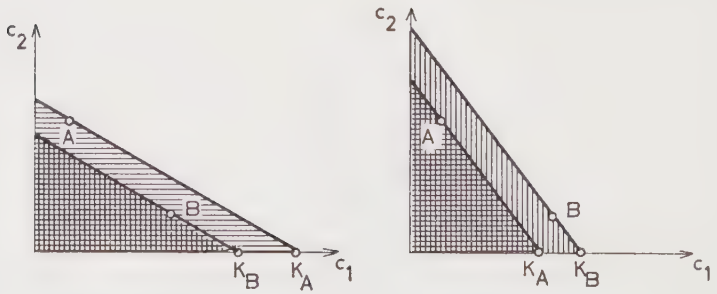


f) Objektiv och subjektiv preferensrelation mellan konsumtionsvektorer

Fig. 2.

Figur f) demonstrerar de objektiva preferensrelationerna mellan å ena sidan den givna med ring markerade konsumtionsvektorn och å den andra godtyckligt valda konsumtionsvektorer i planet. Enligt den givna definitionen är alla vektorer inom det ljust prickade området objektivt bättre och alla vektorer inom det mörkt prickade området objektivt sämre än den givna konsumtionsvektorn. — I respektive områden inräknas då även alla vektorer på deras gränslinjer med undantag av gränslinjernas skärningspunkt vilken svarar mot den givna konsumtionsvektorn. — Beträffande vektorerna utanför dessa prickade områden och deras gränslinjer i relation till den givna vektorn kan ingenting objektivt sägas — de kan vara bättre, sämre eller indifferenta beroende på det subjektiva preferenssystemets karaktär. Indifferenskurvan utvisande de med den givna konsumtionsvektorn subjektivt likvärdiga vektorerna måste passera genom den del av planet

SAMMANFALLANDE IN- OCH UTLÅNINGSRÄNTOR



g) Investering A föredras objektivt

h) Investering B föredras objektivt

Fig. 3.

som saknar markering — men den kan också passera var som helst i detta område.

Vi kan nu se huruvida de under a) — e) förutsatta preferenssystemen uppfyller de villkor som ställs av det ovan sagda. Vad först preferenssystemet a) beträffar ser vi att indifferenskurvorna skär varandra. För att göra systemet rimligt måste vi — enligt vad som sagts — dela upp planet i en del där hög intern ränta eftersträvas och i en annan där låg intern ränta eftersträvas. Sålunda skulle vi med sagda korrigering kunna få indifferenskurvor som brutna räta linjer vilka ej skär varandra under förutsättning att vi utesluter själva den med ring markerade punkten i figur a). Emellertid blir det hela betydligt mera komplicerat när antalet dimensioner ökas. Antalet konsumtionsvektorer vilka från den givna inkomstvektorn kan åstadkommas med investeringsvektorer svarande mot flera olika internräntesatser kommer att växa. Alla dylika vektorer som skulle svara mot flera indifferensloci måste uteslutas ur preferenssystemet och utgöra gränser för intervall där hög eller låg intern ränta eftersträvas. Det är emellertid alls ej lika lätt som i det tvådimensionella fallet att avgöra om den interna räntan skall maximeras eller minimeras i ett dylikt intervall. Preferenssystemet under a) är av dessa skäl speciellt olämpligt.

Vidare kan sägas att fallen c) och d) ej uppfyller de objektiva krav på preferenssystemen som har uppställts under f) — beroende på att i dessa fall substitutionsmöjligheter saknas och indifferenskurvorna följaktligen sammanfaller med gränslinjerna till de prickade områdena i figur f).

Preferenssystemen under b) och e) är de enda som helt står i överensstämmelse med definitionen av objektiva preferensrelationer, varvid b) är ett specialfall av de under e) illustrerade preferenssystemen. Det speciella systemet b) leder till maximering av kapitalvärdet. Emellertid kan det finnas andra skäl till maximering av kapitalvärdet än speciella egenskaper hos preferenssystemet.

Figurerna g) och h) illustrerar *möjlighetsområdena* för handlandet när olika investeringar väljs och kombineras med in- och utlåning i bank till en sammanfallande räntesats. Punkterna A och B svarar mot de konsumtionsvektorer vilka uppnås när respektive investeringar genomförs utan några kompletterande lån eller placeringar i bank. De horisontalstreckade områdena består av de möjliga konsumtionsvektorer som kan uppnås när investering A väljs och kompletteras med in- och utlåning i bank. De vertikalstreckade områdena representerar möjligheterna när B väljs. Ifall bankräntan är sådan att figur g) gäller kommer — oavsett hur preferenssystemet ser ut om det bara uppfyller restriktionerna som uppställts under f) — den optimala konsumtionsvektorn att vara en sådan som är möjlig när investe-

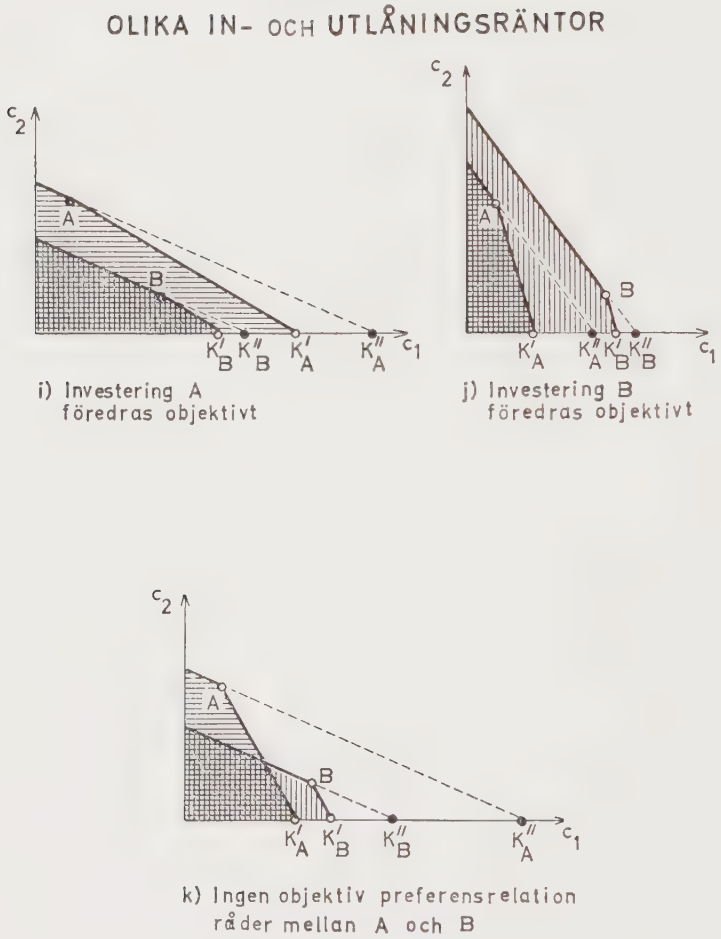


Fig. 4.

ring A väljs men omöjlig när investering B väljs. Följaktligen skall investering A väljas oavsett preferenssystemets specifika egenskaper. Ifall bankräntan har ett högre värde så att figur h) blir aktuell kastas slutsatserna om och investering B skall väljas. Avståndet mellan K_A och K_B i figurerna utgör skillnaden mellan kapitalvärdena för investeringarna A och B när dessa värden kalkyleras med bankräntan. Följaktligen är kapitalvärdet för A större i figur g) men kapitalvärdet för B större i figur h).

Figurerna i) och j) illustrerar objektiva preferensrelationer där investering A respektive investering B föredras vid olika in- och utlåningsräntor. Det bör observeras att avståndet mellan K'_A och K'_B anger skillnaden mellan

kapitalvärdena för respektive investeringar när dessa kalkyleras med inlåningsräntan och att avståndet mellan K'_A och K'_B anger skillnaden mellan kapitalvärdena för respektive investeringar när dessa kalkyleras med utlåningsräntan. Följaktligen är enligt figur i) där investering A föredras dess kapitalvärde högst vid kalkylering såväl med inlåningsräntan som med utlåningsräntan. På samma sätt är kapitalvärdet för investering B större vid bägge räntesatserna i figur j).

Figur k) slutligen visar ett fall med olika in- och utlåningsräntor där kapitalvärdet av investering A är högre vid kalkylering med utlåningsräntan, men lägre vid kalkylering med inlåningsräntan. Ingen av de bägge investeringarnas områden av möjliga konsumtionsvektorer täcker helt motsvarande område för den andra investeringen, varför investering A eller investering B kan väljas beroende på de subjektiva tidspreferensernas karaktär.

2. Formalisering av förutsättningarna

Det är nu lämpligt att matematiskt formulera de begrepp och förutsättningar som hittills har förts in verbalt. Den beslutande konsumtionsenheten tänkes planera för m lika långa tidsperioder. Under dessa förväntas inkomsterna $y_1, \ldots, y_m$ med fullständig säkerhet. Inkomsterna utbetalas vid sluten av de perioder som indiceringen anger. Hela serien av förväntade inkomster kallas 'inkomstvektor' och betecknas $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]$. Dessa inkomster består av nettot från betalningar i samband med all annan verksamhet än den investeringsverksamhet som beslutet avser — alltså även sådan investeringsverksamhet som konsumtionsenheten engagerat sig i tidigare. Den första komponenten i inkomstvektorn antas även innehålla den initiella förmögenheten. Denna inkomstvektor representerar således de betalningar vilka ej förändras under diskussionens förutsättningar. Den initiella förmögenheten uppfattas då även som en inbetalning till konsumtionsenheten vid slutet av den första perioden — dvs. vid den första tidpunkt då några utbetalningsbehov antas kunna inträffa.[1]

Med ordet 'konsumtionsvektor' avses serien av konsumerade värden under

[1] Det bör observeras att de här använda begreppen inkomst och nettointäkt ingenting har att göra med den företagsekonomiska distinktionen mellan inkomster och intäkter, där inkomsterna antas inträffa i de ögonblick försålda varor levereras (eller tjänster betalas) och där intäkterna erhålles genom någon bokföringsmässig fördelning av inkomsterna mellan de perioder »till vilka de höra». Se L. H. Skare, N. Västhagen, S. E. Johansson, »Industriell kostnadsberäkning och redovisning», Stockholm 1961.

de m perioderna. Den betecknas $\mathbf{c} = [c_1, ..., c_m]$. För varje period antas de under denna inköpta konsumtionsvarorna bli betalda vid periodens slut samtidigt med att inkomsterna utbetalas.

Konsumtionsvektorn kan möjligen helt överensstämma med inkomstvektorn, så att alltså varje periods inkomst förbukas under samma tid som den intjänas. Å andra sidan är det även möjligt att ge konsumtionen en annorlunda tidsfördelning än de förväntade inkomsterna.

Ett sätt att åstadkomma detta erbjudes av engagement i olika reella eller finansiella investeringsprocesser. Varje sådant engagement leder till en på förhand känd serie in- och utbetalningar. En sådan betalningsserie kallas 'investeringsvektor' och betecknas $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_m]$, där för enkelhets skull betalningarna antas äga rum vid periodsluten då konsumtionsvarorna betalas och inkomsterna utbetalas. I investeringsvektorn erhåller de komponenter som motsvarar inbetalningar till konsumtionsenheten positivt förtecken, medan de komponenter som motsvarar utbetalningar från konsumtionsenheten erhåller negativt förtecken. Somliga komponenter kan ha värdet 0, vilket betyder att en investeringsvektor med m dimensioner kan anges för investeringar med varierande varaktighet och betalningsperiodicitet.

När konsumtionsenheten engagerar sig i ett investeringsprojekt, kan konsumtionsvaror under de olika perioderna inköpas till värden som överstiger eller understiger de förväntade inkomsterna med storleken av investeringsprocessens betalningar, beroende på om dessa går in till eller ut från konsumtionsenheten. Med andra ord är $c_i = y_i + x_i$ för $i = 1, ..., m$. Det sagda kan uttryckas mera komprimerat genom $\mathbf{c} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, där vektoradditionen definieras som addition av alla motsvarande komponenter i vektorerna $\mathbf{y}$ och $\mathbf{x}$, och där likheten definieras som likhet för alla motsvarande komponenter i vektorerna $\mathbf{c}$ och $\mathbf{y} + \mathbf{x}$. Vektoraddition och likhet mellan vektorer kan naturligtvis endast definieras för vektorer av samma dimension.

Konsumtionsenheten antas ha att välja mellan två olika investeringsprojekt representerade av betalningsvektorerna $\mathbf{x}^{(1)} = [x_1^{(1)}, ..., x_m^{(1)}]$ och $\mathbf{x}^{(2)} = [x_1^{(2)}, ..., x_m^{(2)}]$. När den ena av dessa är den m dimensionella $\mathbf{0}$-vektorn, kommer valet att ske mellan den enda återstående verkliga investeringen och ingen investering alls.

I den inledande diskussionen förutsattes att konsumtionsenheten dessutom skulle ha tillgång till andra möjligheter för omfördelning av konsumtionen över tiden än de bägge investeringsprojekten. En sådan, tills vidare icke närmare specificerad omfördelning kan liksom för investeringarnas del anges av en serie inbetalningar till och utbetalningar från konsumtionsenheten, vilka höjer konsumtionsvärdet under vissa perioder och sänker det

under andra. Sådana betalningsserier avses med ordet 'transformationsvektor' och betecknas $\mathbf{z}=[z_1,...,z_m]$. Som synes antas även betalningarna i dessa serier äga rum vid periodsluten; även här anges inbetalningar till konsumtionsenheten med positivt förtecken, utbetalningar med negativt.

Mängden av alla möjliga transformationsvektorer betecknas i fortsättningen T och kallas 'transformationsmängden'. Denna representerar alla de betalningsserier vilka kan åstadkommas genom insättningar och uttag i bank eller genom tesaurering av kontanter. Däremot omfattar den ej några investeringsvektorer, ty de sistnämnda antas vara rent alternativa. Senare behandlas problemet om kombinationer eller blandningar av flera olika investeringsprojekt. I detta kapitel förutsätts att var och en av de bägge investeringarna kan kombineras med banklån, banksparande och tesaurering, men att de ej kan kombineras med varandra.

Vidare förutsätts villkoren för banksparande och banklån vara oberoende av investeringsvalet samt av inkomstvektorns utseende.[1] I övrigt uppskjutes den närmare härledningen av mängden T omfattande alla de möjliga transformationsvektorerna $\mathbf{z}$ tills vidare.

Konsumtionens värde under varje period kommer nu att överskrida eller underskrida periodens inkomst med ett belopp som utgör nettot av periodens betalningar till konsumtionsenheten från investeringen och från bankkontot, beroende på om nettot är positivt eller negativt. Annorlunda uttryckt är $c_i=y_i+x_i+z_i$ för $i=1,...,m$, eller i vektornotering $\mathbf{c}=\mathbf{y}+\mathbf{x}+\mathbf{z}$. I detta uttryck är $\mathbf{y}$ given när de förväntade inkomsterna är givna. Likaså är $\mathbf{x}$ given för varje särskild investering när de med investeringsprocessen förbundna intäkterna och kostnaderna förväntas vara givna. För $\mathbf{z}$ däremot kan vilken som helst av de möjliga transformationsvektorerna i mängden T väljas. För varje $\mathbf{z}$ erhålles ett visst $\mathbf{c}$, så att olika konsumtionsvektorer svarar mot valet av en investering beroende på vilken ytterligare transformation som väljes. Mängden av möjliga konsumtionsvektorer betecknas S.[2]

Denna mängd kan enligt en vanlig definition för summan av vektor-

[1] Förutsättningen är orimlig i den mån själva investeringsprocessen står som säkerhet för banklån till dess finansiering och lånevillkoren beror på säkerhetens art. Det kommer senare att tas hänsyn till denna komplikation, men i huvudframställningen bortses härifrån, beroende på att de allmänna härledningarna blir avsevärt enklare ifall transformationsmängden T får vara densamma oavsett om den första eller den andra investeringen väljes.

[2] Observera att den något olämpliga beteckningen S för mängden av möjliga konsumtionsvektorer ingenting har att göra med den indicering S som används för ränta på sparräkning i det följande. Kollisionerna för använda symboler har ej kunnat undvikas på grund av alfabetets begränsade omfång.

mängder skrivas $S = \{\mathbf{y} + \mathbf{x}\} + T$.[1] I uttrycket betecknar $\{\mathbf{y} + \mathbf{x}\}$ en mängd bestående av summavektorn $\mathbf{y} + \mathbf{x}$ som enda medlem, medan T är den tidigare införda mängden av transformationsvektorer. Summan av två vektormängder definieras nu som mängden av alla olika summavektorer för vektorspar bildade av en vektor från vardera av de summerade mängderna. När den ena mängden, som i det aktuella fallet, består av en enda vektor, erhålles summan helt enkelt genom att denna enda vektor adderas till var och en av vektorerna i den andra mängden; alltså genom att $\mathbf{y} + \mathbf{x}$ adderas till varje $\mathbf{z} \in T$.[2]

När den första investeringen väljes skall sålunda ett ytterligare val träffas mellan alla de olika konsumtionsvektorerna $\mathbf{c}^{(1)}$ inom mängdens $S^{(1)} = \{\mathbf{y} + \mathbf{x}^{(1)}\} + T$, liksom ett ytterligare val mellan vektorerna $\mathbf{c}^{(2)}$ inom $S^{(2)} = \{\mathbf{y} + \mathbf{x}^{(2)}\} + T$ skall träffas när den andra investeringen väljes. Valet mellan olika investeringar leder alltså till olika mängder av alternativa konsumtionsvektorer mellan vilka ytterligare ett val skall anställas. Innan det är möjligt att diskutera preferenserna mellan mängder av alternativa konsumtionsvektorer, måste emellertid det enklare problemet om preferenserna mellan enskilda konsumtionsvektorer behandlas.

Det förutsättes att konsumtionsenheten, identifierad med index j, har en fullständig preferensordning definierad på alla tänkbara mängder av konsumtionsvektorer inom den positiva ortanten av ett m-dimensionellt Euklideiskt rum, betecknat R^m, för att ange att det utgör den cartesianska produkten av m mängder vardera bestående av de reella talens continuum. Preferensrelationen mellan två vektorer betecknas tills vidare '$\succsim_j$' och utläses »minst lika bra som». Preferenserna är fullständiga däri att för varje vektorspar, $\mathbf{c}^{(1)}$ och $\mathbf{c}^{(2)}$, antingen $\mathbf{c}^{(1)} \succsim_j \mathbf{c}^{(2)}$ eller $\mathbf{c}^{(2)} \succsim_j \mathbf{c}^{(1)}$ eller möjligen bägge satserna måste gälla. Ifall $\mathbf{c}^{(1)} \succsim_j \mathbf{c}^{(2)}$ men ej $\mathbf{c}^{(2)} \succsim_j \mathbf{c}^{(1)}$ gäller kan en

[1] Egentligen borde mängden av möjliga konsumtionsvektorer begränsas till den del av S som faller inom den positiva ortanten av R^m, ty konsumtionen kan ju inte gärna bli negativ under någon period. Emellertid är preferenssystemet sådant att konsumtionsvektorer vilka faller utanför den positiva ortanten aldrig blir valda, varför den fysiska omöjligheten att välja dem ej behöver anges särskilt.

[2] Se Gerard Debreu, »Theory of Value», 1959, s.20. Observera att summeringen av vektormängder enligt denna definition ej är detsamma som den s. k. logiska summan av mängder. Resultatet av den senare operationen kallas i enlighet med gängse terminologi för 'union'. Likaså användes ordet 'intersektion' för att beteckna den logiska produkten. Härigenom förloras möjligheten att använda de kända additions- och multiplikationssymbolerna för operationer vilka i stort sett följer samma regler som motsvarande operationer i vanlig algebra. Å andra sidan blir de bägge symbolerna fria varför additionssymbolen kan användas så som ovan, och multiplikationssymbolen utan tvetydighet för bildandet av s. k. Cartesianska produkter av mängder. Operationerna intersektion och union betecknas med '$\cap$' respektive '$\cup$'.

sekundär relationssats $\mathbf{c}^{(1)} \succ_j \mathbf{c}^{(2)}$ sägas gälla. Analogt gäller $\mathbf{c}^{(2)} \succ_j \mathbf{c}^{(1)}$ när $\mathbf{c}^{(2)} \succsim_j \mathbf{c}^{(1)}$ men ej $\mathbf{c}^{(1)} \succsim_j \mathbf{c}^{(2)}$ gäller. Relationen '$\succ_j$' utläses »bättre än». I det återstående fallet, då satserna $\mathbf{c}^{(1)} \succsim_j \mathbf{c}^{(2)}$ och $\mathbf{c}^{(2)} \succsim_j \mathbf{c}^{(1)}$ bägge gäller, gäller $\mathbf{c}^{(1)} \sim_j \mathbf{c}^{(2)}$ eller $\mathbf{c}^{(2)} \sim_j \mathbf{c}^{(1)}$, där '$\sim_j$' utläses »likvärdig med». Preferensordningen är alltså fullständig när för varje par av konsumtionsvektorer, $\mathbf{c}^{(1)}$ och $\mathbf{c}^{(2)}$, antingen $\mathbf{c}^{(1)}$ anses vara bättre än $\mathbf{c}^{(2)}$, eller $\mathbf{c}^{(2)}$ anses vara bättre än $\mathbf{c}^{(1)}$ eller också bägge anses vara likvärdiga. Index j har hela tiden medtagits för att markera preferensernas anknytning till den j:te konsumtionsenheten.

Alla binära relationer, såsom de tre behandlade relationerna $\succsim_j$, $\succ_j$ och $\sim_j$, mellan par av vektorer inom R^m kan även uppfattas som mängder av ordnade vektorspar, nämligen de par mellan vars vektorer ifrågavarande relationer består. Ordningen inom paren är väsentlig när relationen, såsom exempelvis $\succ_j$, ej är symmetrisk. Relationsmängderna motsvarande $\succ_j$ och $\sim_j$ betecknas repsketive P_j och I_j.[1] Den mängd ordnade vektorspar som motsvarar relationen $\succsim_j$ är partitionerad eller fullständigt uppdelad i de varandra uteslutande mängder som svarar mot relationerna $\succ_j$ respektive $\sim_j$. Samtliga tre relationer uppfattade som mängder är delmängder inom det $2m$-dimensionella Euklideiska rummet, betecknat R^{2m}. Så gäller både $P_j \subset R^{2m}$ och $I_j \subset R^{2m}$.[2]

Olika konsumtionsenheter torde ha olikartade preferenser; dvs. de mängder som motsvarar relationerna $\succ_j$ och $\sim_j$, alltså P_j och I_j, är olika delmängder av R^{2m} för olika konsumtionsenheter, dvs. för olika j. Emellertid har preferenserna för alla rationellt handlande konsumtionsenheter vissa drag gemensamma, dvs. vissa vektorspar innehålles i relationsmängderna P_j eller I_j för samtliga konsumtionsenheter. Sålunda gäller att ett par identiskt lika konsumtionsvektorer ingår i relationsmängden I_j för samtliga j. Mindre trivialt är att en konsumtionsvektor föredras framför en annan av samtliga konsumtionsenheter, dvs. det av de bägge vektorerna bildade ordnade paret ingår i relationsmängden P_j för samtliga j, om den första vektorn ej har någon komponent mindre än och har minst en komponent större än motsvarande komponent i den andra vektorn.

Dessa relationer måste preciseras. Likhet mellan två vektorer har tidigare definierats som likhet mellan alla motsvarande komponenter, dvs. $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{c}^{(2)}$

---

[1] Logikerna torde i allmänhet betrakta relationerna som mängder av ordnade par. Det har emellertid förefallit intuitivt mera lättbegripligt att skilja mellan symbolerna för relationer som består mellan konsumtionsvektorer och för de mängder av ordnade par vilka betecknats med det »hemmagjorda» ordet 'relationsmängd'.

[2] Om binära relationer se R. G. D. Allen, »Basic Mathematics», 1962, s. 171 ff. och Patrick Suppes, »Introduction to Logic», 1957, s. 208 ff.

när $c_i^{(1)} = c_i^{(2)}$ för $i = 1, \ldots, m$. På motsvarande sätt definieras olikheterna $\mathbf{c}^{(1)} \geqslant \mathbf{c}^{(2)}$ när $c_i^{(1)} \geqslant c_i^{(2)}$ för $i = 1, \ldots, m$ och $\mathbf{c}^{(1)} > > \mathbf{c}^{(2)}$ när $c_i^{(1)} > c_i^{(2)}$ för $i = 1, \ldots, m$. Denna efter Debreu utformade dubbla olikhetssymbol ger fria möjligheter att definiera $\mathbf{c}^{(1)} \sim \mathbf{c}^{(2)}$ så att ingen komponent i den första vektorn får vara mindre och åtminstone en komponent måste vara större än motsvarande komponent i den andra vektorn, dvs. $c_i^{(1)} \geqslant c_i^{(2)}$ för $i = 1, \ldots, m$ och $\sum_{i=1}^{m} c_i^{(1)} \sim \sum_{i=1}^{m} c_i^{(2)}$. Denna definition stämmer överens även med definitionen av större budget hos Wold.[1] Som synes är $>$ en svagare olikhet än $> >$, men starkare än $\geqslant$ i och med att likheten = uteslutes.

Det gäller nu att $\mathbf{c}^{(1)} \succ_j \mathbf{c}^{(2)}$ för alla j om och endast om $\mathbf{c}^{(1)} > \mathbf{c}^{(2)}$; att $\mathbf{c}^{(2)} \succ_j \mathbf{c}^{(1)}$ för alla j om och endast om $\mathbf{c}^{(2)} > \mathbf{c}^{(1)}$; och att $\mathbf{c}^{(1)} \sim_j \mathbf{c}^{(2)}$ för alla j om och endast om $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{c}^{(2)}$. Dessa preferensrelationer som uppstår när $\mathbf{c}^{(1)} \sim \mathbf{c}^{(2)}$, $\mathbf{c}^{(2)} > \mathbf{c}^{(1)}$ eller $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{c}^{(2)}$ kan kallas objektiva eftersom i dessa fall den första konsumtionsvektorn föredras, den andra konsumtionsvektorn föredras eller bägge anses likvärdiga av alla konsumtionsenheter med rationella preferenser. Dessa objektiva preferenser skiljer sig emellertid från de individuella eller subjektiva i ett viktigt avseende. Varje konsumtionsenhet har fullständiga subjektiva preferenser, så att för varje par av konsumtionsvektorer $\mathbf{c}^{(1)}$ och $\mathbf{c}^{(2)}$ antingen $\mathbf{c}^{(1)} \succ_j \mathbf{c}^{(2)}$ eller $\mathbf{c}^{(2)} \succ_j \mathbf{c}^{(1)}$ eller $\mathbf{c}^{(1)} \sim_j \mathbf{c}^{(2)}$ gäller. Föredrar konsumtionsenheten ingen av de bägge vektorerna, måste de alltså vara likvärdiga. Objektivt föredras ingen av vektorerna om varken $\mathbf{c}^{(1)} \sim \mathbf{c}^{(2)}$ eller $\mathbf{c}^{(2)} > \mathbf{c}^{(1)}$ gäller. Objektivt likvärdiga är de endast om $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{c}^{(2)}$. Nu behöver $\mathbf{c}^{(1)} \not> \mathbf{c}^{(2)}$ och $\mathbf{c}^{(2)} \not> \mathbf{c}^{(1)}$ inte nödvändigtvis implicera $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{c}^{(2)}$, ty de fall då somliga komponenter i den ena vektorn är större samtidigt som andra komponenter är mindre än motsvarande komponenter i den andra vektorn innebär att ingen av $\mathbf{c}^{(1)} > \mathbf{c}^{(2)}$, $\mathbf{c}^{(2)} > \mathbf{c}^{(1)}$ och $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{c}^{(2)}$ gäller. Den objektiva preferensrelationen är således endast partiell.

När konsumtionsenheten har att välja mellan två investeringar, (1) och (2), gäller investeringsvalet två mängder, $S^{(1)}$ och $S^{(2)}$ av konsumtionsvektorer, varefter ett ytterligare val av konsumtionsvektor skall träffas inom den av de bägge mängderna, som motsvarar den valda investeringen. Detta sker genom att konsumtionsenheten söker de med hänsyn till relationen $\succ_j$ gynnsammaste konsumtionsvektorerna som hör till endera $S^{(1)}$ eller $S^{(2)}$ eller eventuellt till bägge. Vilken som helst av dessa gynnsammaste konsumtionsvektorer, likvärdiga sinsemellan enligt $\sim_j$, är optimal. I och med att en optimal konsumtionsvektor har utsetts väljes även en viss in-

[1] Se Gerard Debreu, a. a., s. 9, R. G. D. Allen, »Mathematical Economics», 1956, s. 411–412. Allen använder '$\geqq$' i stället för '$\geqslant$'; '$\geqslant$' i stället för '$>$'; och '$>$' i stället för '$> >$'. Se även Herman Wold, »Demand Analysis», 1952, s. 81.

vestering, nämligen någon bland dem vars motsvarande mängd konsumtionsvektorer innehåller den optimala vektorn. Skulle denna optimala vektor själv, eller någon annan av de optimala konsumtionsvektorerna ifall de är flera, ingå i mängden av konsumtionsvektorer som svarar mot den icke valda investeringen, är investeringarna indifferenta. I annat fall föredras endera av de bägge investeringarna. Detta visar att investeringsvalet i regel beror på valet av konsumtionsfördelning i tiden, eller, annorlunda uttryckt, på konsumtionsenhetens tidspreferenser för konsumtionens fördelning.

Det gäller nu att söka villkor för att investeringsvalet skall kunna träffas på rent objektiva indikationer, så att det ej beror på någon specifik konsumtionsenhets subjektiva tidspreferenser, utan endast på de allmänna rationalitetsegenskaper som är gemensamma för de olika konsumtionsenheternas preferenssystem. Med andra ord måste investeringsvalet anknytas till den ofullständiga objektiva preferensrelationen mellan konsumtionsvektorer. En objektiv preferensrelation mellan investeringar, motsvarande den mellan konsumtionsvektorer, kan nu ges på följande sätt: En investering skall objektivt föredras framför en annan, ifall det för varje konsumtionsvektor som möjliggöres genom valet av den andra investeringen, finns åtminstone en konsumtionsvektor inom dess egen mängd av möjliga konsumtionsvektorer, vilken objektivt föredras enligt den ovan definierade relationen. Formellt uttryckt, föredras (1) objektivt framför (2), ifall det för varje $\mathbf{c}^{(2)} \in S^{(2)}$ finns åtminstone ett $\mathbf{c}^{(1)} \in S^{(1)}$ sådant att $\mathbf{c}^{(1)} > \mathbf{c}^{(2)}$. Likaså föredras (2) objektivt framför (1) ifall det för varje $\mathbf{c}^{(1)} \in S^{(1)}$ finns åtminstone ett $\mathbf{c}^{(2)} \in S^{(2)}$ sådant att $\mathbf{c}^{(2)} > \mathbf{c}^{(1)}$. Slutligen är de bägge investeringarna objektivt likvärdiga ifall $S^{(1)} = S^{(2)}$, vilket i regel endast inträffar när $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$, dvs. när investeringarna ger identiska betalningsserier.

Denna objektiva preferensrelation mellan investeringar har även egenskapen att den gäller för en grupp av olika konsumtionsenheter, vilka engagerar sig i investeringsverksamheten gemensamt och sinsemellan delar upp såväl dess kostnader som dess förväntade avkastningar. En viss investering av två föredras alltid av en hel grupp gemensamt investerande konsumtionsenheter med sinsemellan olika preferenssystem, ifall valet av denna investering i jämförelse med valet av den andra leder till att samtliga inom gruppen kan erhålla högre konsumtionsvärde under minst en period, utan att någon inom gruppen behöver erhålla mindre konsumtionsvärde under någon period. Så är fallet när valet av den ena investeringen i jämförelse med det motsatta valet leder till att gruppens sammanlagda konsumtionsvärde kan bli högre under minst en period utan att behöva bli lägre under någon av de övriga — och detta vilken det sammanlagda

konsumtionsvärdets tidsfördelning än skulle ha varit om det motsatta valet hade gjorts.

Om nu den ena av två investeringar är objektivt fördelaktigare för en enskild konsumtionsenhet så som ovan definierats, måste den alltså även vara det för en hel grupp av olika konsumtionsenheter som investerar gemensamt ty det föregående resonemanget blir direkt tillämpligt för en grupp om **y** och **c** uppfattas som tidsfördelningarna av gruppens sammanslagna inkomster respektive konsumtionsvärden.

Särskilt av det senast diskuterade fallet framgår att det är en betydande formell likhet mellan Paretos teori för välfärdsekonomiska optima och den föregående diskussionen om möjligheten att fatta investeringsbeslut på grundval av objektiva lönsamhetsindikationer utan hänsyn till de tidspreferenser för konsumtionens fördelning som investeringsverksamheten avser att tillfredsställa. Den föregående diskussionen har förutsatt att objektiva investeringsval endast kan ske om paretooptimalitet i någon mening föreligger. Det är nu nödvändigt att undersöka när så är fallet. Därför gäller det allra först att bestämma transformationsmängden T.

3. Bestämning av transformationsmängden

Vi skall nu härleda mängden T, vilken utgöres av alla de möjliga transformationsvektorerna $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]$, eller serierna av positiva och negativa förändringar i de konsumerade värdena, som kan åstadkommas på annat sätt än genom de investeringar det gäller att välja mellan. De transformationer som implicit förutsättes i läroböcker över investeringskalkyler, synes vara sådana som åstadkommes genom depositioner och lån till kända räntesatser. Dessa räntesatser torde, som vi har antagit, åsyftas med kalkylräntebegreppet. Kalkylräntan förmodas i allmänhet ha ett entydigt värde, som är subjektivt och samtidigt på något sätt uttrycker både låneräntan, dvs. kostnaden för att låna upp kontanter, och sparräntan, dvs. alternativkostnaden för utlåning av disponibla kontanter. Kalkylräntan uppfattad som subjektiv räntesats, har vi funnit vara ägnad att dölja problemen snarare än att lösa dem. Naturligtvis kan en enda räntesats samtidigt uttrycka lånekostnaden och alternativkostnaden endast om låne- och sparräntorna sammanfaller. Att man har tvingats ta till arrangemanget med den subjektiva kalkylräntan, tyder emellertid på att man haft ögonen på det förhållandet att de bägge räntesatserna i praktiken ej sammanfaller, då ju skillnaden mellan dem skall utgöra kreditinstitutens intäktsmarginal. Vi skall därför i stället för att söka en entydig kalkylränta förutsätta att låneräntan, betecknad i_L, har ett värde skilt från sparräntans, vilken vi beteck-

nar med i_S. Terminologin är naturligtvis något oegentlig. Vad som avgör om låneräntan eller sparräntan är den tillämpliga är icke det att konsumtionsenheten upptar lån eller sparar utan det att konsumtionsenheten har skuld eller tillgodohavande i banken. Ordet 'sparande' har i det aktuella sammanhanget ej någon mera subtil mening än uttrycket 'deposition på bankräkning avsedd för uppsamling av sparmedel'. Vidare gäller för såväl låneräntan som för sparräntan att deras tillämplighet beror på beståndsstorheterna skuld och tillgodohavande och ej på strömstorheterna upptagna nya lån och gjorda nya depositioner. Även tesaurering betraktas för enkelhets skull som bankdeposition på räntelöst konto.

Från de villkor för **z** som vi erhåller genom de angivna förutsättningarna, erhålles två specialfall av visst intresse. Det första av dem är det då de bägge räntesatserna sammanfaller, dvs. $i_L = i_S = i$, varvid det kan ha mening att tala om en kalkylränta. Det andra fallet uppstår då $i_L = \infty$ och $i_S = 0$, dvs. då ingen ränta betalas för deponerade medel, och depositioner alltså sker genom tesauering av kontanter, medan låneräntan är oändligt hög, vilket utgör ett absolut hinder för att låna.

Hindret för att låna ytterligare kan i stället tänkas lagt vid ett positivt lånebelopp, upp till vilket det står en fritt att låna vid den gällande räntesatsen. Likaså kan det tänkas att den aktuella sparräntan endast utgår på ett tillgodohavande som ej får överstiga visst värde, varefter ytterligare deposition får ske genom tesaurering. Det mest realistiska torde vara att inte sätta in de kvantitativa restriktionerna så abrupt som vi har sagt. När den sparräkning vilken ger den högsta räntan har blivit fylld upp till det tillåtna värdet, har man i regel tillgång till andra räkningar, vilka alla successivt fyllas innan tesaureringen är det enda som återstår. Detsamma gäller låneräntan. Man kan troligen slippa undan med lägre ränta om lånebeloppet är litet, medan ytterligare lån fordrar successivt högre ränta till det definitiva stoppet slutligen inträffar. Den beskrivna situationen torde kunna approximeras med ett fall där man låter räntesatsen kontinuerligt variera med det deponerade eller lånade beloppet från 0 till ∞.

Vi har resonerat som om depositions- och lånevillkoren vore oförändrade under hela den tid för vilken konsumtionsenheten planerar. Naturligtvis måste den som har att besluta för dess räkning vänta sig att villkoren kommer att förändras. Det erbjuder inga svårigheter att generalisera de olika genomgångna fallen till räntesatser och restriktioner som varierar mellan de m olika perioderna. Emellertid synes det rimligt att dessa varierande förhållanden anteciperas med en viss osäkerhet. Under dessa förhållanden kan förväntningarna ange vissa intervallgränser för de olika räntesatserna. Det mest realistiska är kanske att tänka sig gemensamma intervallgränser,

avseende alla de perioder, som planeringen omfattar, och ej preciserade för varje enskild period. Därmed skulle generaliseringen till varierande räntesatser och restriktioner måhända bli av mindre intresse.

Eftersom vi nu har fört in förväntningar beträffande de räntesatser som torde åsyftas med kalkylräntebegreppet, fordras ett klarläggande. I och med att de olika räntesatserna är förväntade, är de naturligtvis i viss mening subjektiva. Den subjektivitet i kalkylräntebegreppet, som vi tidigare kritiserade, avser emellertid inte att kalkylräntan skulle vara en subjektivt förväntad räntesats, utan att den skulle vara en räntesats som konsumtionsenheten skulle fordra enligt sina subjektiva preferenser. Genom att preferenserna formuleras på detta sätt, förutsätter man helt enkelt *att* man väljer ett investeringsprojekt ifall det ger viss intern ränta, medan alla våra konstruktioner går ut på att visa när och varför ett sådant handlande skulle vara rationellt.

Vi skall nu i tur och ordning härleda villkoren för mängden av transformationsvektorer T under de olika förutsättningar som ovan angivits.

a) *Härledning av T vid olika in- och utlåningsräntor för två perioder*

Vi startar med att härleda T för det fall då låneräntan och sparräntan har skilda värden och då man till dessa räntesatser kan låna eller placera obegränsade belopp. Vidare antas dessa räntesatser vara oförändrade under hela den tid för vilken planeringen sker. Härledningen av de villkor som definierar T görs dels för två och dels för tre perioder. Denna härledning kan på analogt sätt göras för varje godtyckligt antal perioder.

Låt oss först bestämma de möjliga transformationsvektorerna $\mathbf{z} = [z_1, z_2]$ i en tvåperiodmodell där låneräntan är i_L och sparräntan är i_S. Om man lånar pengar vid slutet av den första perioden för att bekosta en del av denna periods konsumtion blir $z_1 > 0$. I tvåperiodmodellen måste skulden inklusive ränta återbetalas vid den andra periodens slut. Dess belopp uppgår då till $z_1(1+i_L)$. Emellertid skriver vi ej $z_2 = -z_1(1+i_L)$, ty det är givetvis möjligt att få betala tillbaka mer än skulden. Villkoret får i stället formuleras som $z_2 \leqslant -z_1(1+i_L)$, eller annorlunda uttryckt som $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$. Det sagda kan synas vara en meningslös spetsfundighet, då man naturligtvis inte betalar tillbaka mer än man är skyldig, men den precisa formuleringen fordras faktiskt för härledningen. Om man alltså sätter sig i skuld vid den första periodens slut består villkoren för vektorn $\mathbf{z}$ i den *samtidiga* uppfyllelsen av olikheterna $z_1 > 0$ och $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$.

Det är även möjligt att välja en konsumtion $c_1 < y_1 + x_1$ under den första perioden, för att vid dess slut, när de konsumerade varorna skall betalas, kunna deponera ett belopp. Detta betyder att $z_1 < 0$. Man har i gengäld

rätt att vid den andra periodens slut lyfta sitt tillgodohavande inklusive ränta, utgörande $-z_1(1+i_S)$. Vi sätter ej heller nu z_2 lika med detta belopp, ty man får ju lyfta mindre än så utan att banken protesterar. Villkoret blir i stället $z_2 \leqslant -z_1(1+i_S)$ eller $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$. Emellertid har vi därmed inte uttömt alla möjligheterna, ty man kan ju både låta bli att deponera och att låna vid slutet av den första perioden. Därvid blir $z_1=0$. För att ej behöva ha detta som ett ytterligare fall kan vi koppla samman det med något av de bägge föregående, likgiltigt vilket, eftersom både $z_1(1+i_L)+z_2<0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$ övergår till $z_2 \leqslant 0$ då $z_1=0$. Om man varken står i skuld till banken, eller har något tillgodohavande, kan ens konto förräntas med vilken som helst räntesats utan att dess värde påverkas av räntesatsens höjd. Villkoret $z_2<0$ betyder att man kan skänka ett belopp till banken vid den andra periodens slut, om man så önskar, men att man varken behöver betala någon skuld eller har rätt att fordra in något tillgodohavande. Vi väljer nu att förena fallet då man deponerar med det då man varken lånar eller deponerar. Villkoren för transformationsvektorn $\mathbf{z}$ består då i den *samtidiga* uppfyllesen av olikheterna $z_1 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$.

Därmed har vi härlett fullständiga villkor för transformationsvektorn i två dimensioner. Transformationsmängden T består av alla de vektorer $\mathbf{z}=[z_1,z_2]$, vilka *antingen* uppfyller villkoren $z_1>0$ och $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$ *eller* uppfyller villkoren $z_1 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$. Dessa villkor kan emellertid förenklas så att detta »antingen-eller» elimineras och endast den *samtidiga* uppfyllelsen av villkoren $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$ fordras. Beviset för detta kan lämpligen genomföras med hjälp av en formulering i mängdlärans begrepp.

Först definierar vi några olika »set», eller »mängder». $A=\{\mathbf{z} \in R^2 | z_1 \leqslant 0\}$ betyder mängden av vektorer $\mathbf{z}=[z_1,z_2]$ inom det tvådimensionella vektorsrummet R^2, vilka har egenskapen att deras första element är icke-positivt. Med $\sim A=\{\mathbf{z} \in R^2 | z_1>0\}$ avses mängden av vektorer inom det tvådimensionella vektorsrummet vilkas första element är positiva. Symbolen $\sim A$ betyder »komplementet till A», dvs. mängden av alla de vektorer inom det i föreliggande fall tvådimensionella vektorsrummet, vilka ej hör till mängden A.

Vidare definieras på analogt sätt $B_1=\{\mathbf{z} \in R^2 | z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0\}$ och $B_2=\{\mathbf{z} \in R^2 | z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0\}$.

Med $A \cap B_1$ åsyftas »intersektionen av mängderna A och B_1», dvs. alla de vektorer $\mathbf{z}$, vilka finns *både* inom mängden A och mängden B_1. Villkoret $\mathbf{z} \in A \cap B_1$ innebär sålunda att $\mathbf{z}$ samtidigt satisfierar *båda* olikheterna, $z_1 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$. På samma sätt betyder villkoret $\mathbf{z} \in \sim A \cap B_2$ att olikheterna $z_1>0$ och $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$ samtidigt är uppfyllda. De fullstän-

diga villkoren för z består nu i att denna antingen skall höra till intersektionen $A \cap B_1$ eller till intersektionen $\sim A \cap B_2$.

Låt oss slutligen definiera »unionen» mellan intersektionsmängderna $(A \cap B_1)$ och $(\sim A \cap B_2)$ som $(A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2)$. En union mellan två mängder betecknar mängden av vektorer som hör till endera av dem eller till bägge. Att z hör till unionen av $(A \cap B_1)$ och $(\sim A \cap B_2)$, formellt uttryckt $z \in (A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2)$, innebär därför just precis att z antingen satisfierar olikheterna $z_1 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$, eller olikheterna $z_1 > 0$ och $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$, eller möjligen allesamman. Vi skulle bevisa att detta var liktydigt med att z satisfierade $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$ på en gång, vilket uttryckt i de nya symbolerna betyder $z \in B_1 \cap B_2$. Vår uppgift är med andra ord att bevisa $(A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2) = B_1 \cap B_2$. Detta gäller ej generellt, varför den följande argumentationen ej bevisar någon logisk tavtologi. Vi kan visa under vilka förhållanden likheten gäller med hjälp av ett s. k. Venn-diagram.

Rektangeln i figuren nedan symboliserar »universum» eller i vårt fall det tvådimensionella vektorsrummet. Alla de mängder som förekommer hör till detta universum. Universum delas i två delar av en linje. Mängden A utgör området på ena sidan om linjen och $\sim A$ utgör resten av rektangeln. B_1 och B_2 symboliseras av de bägge cirklarna.

Observera att detta framställningssätt med Venn-diagram inte är begränsat till fall där medlemmarna i de olika mängder som förekommer är vektorer i två dimensioner och alltså verkligen motsvaras av punkter i ett plan. De slutsatser som härleds gäller även om vektorerna har fler dimensioner, eller färre — i detta senare fall finns ju bara den möjligheten att de olika medlemmarna är reella tal. Det generella i argumentationen framgår kanske bäst om vi låter medlemmarna vara objekt som varken är tal eller vektorer, utan exempelvis studenter. Universum kan tänkas bestå av alla studenterna vid ett universitet, delmängden A av de manliga studenterna, och dennas komplement $\sim A$ av de kvinnliga studenterna. Delmängden B_1 kan vara alla de studenter vilka har studerat nationalekonomi, och delmängden B_2 alla de studenter som har haft mässlingen. Det följande resonemanget som avser möjligheten för lån och depositioner gäller även för studenterna. I detta fall vill vi visa att totaliteten av alla manliga studenter, vilka läst nationalekonomi, och alla kvinnliga studenter, vilka haft mässlingen, är densamma som totaliteten av alla de studenter oavsett kön som både har läst nationalekonomi och har haft mässlingen.

Som synes har figuren ritats så att de båda halvmånformade figurerna $\sim B_1 \cap B_2$ och $B_1 \cap \sim B_2$ ligger på var sin sida om den linje som delar upp universum mellan A och $\sim A$. Detta förhållande anges formellt med

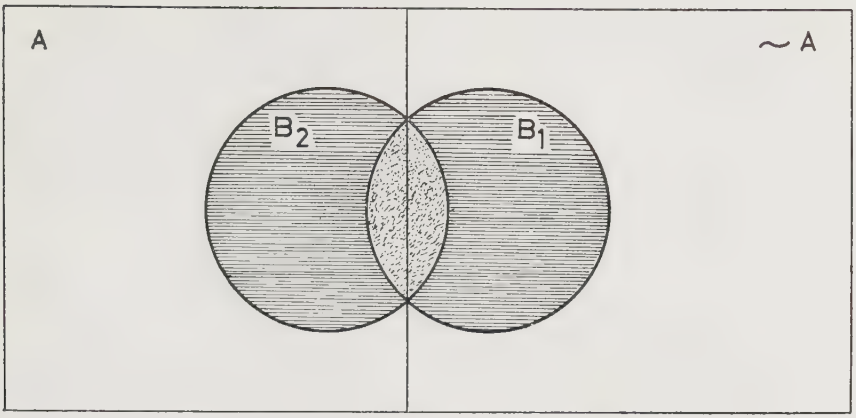


Fig. 5.

$\sim B_1 \cap B_2 \subset A$ och $B_1 \cap \sim B_2 \subset \sim A$, vilket utläses: Intersektionen mellan B_2 och komplementet till B_1, dvs. den del av B_2 som ej hör till B_1, är en delmängd av A; samtidigt som intersektionen mellan B_1 och komplementet till B_2, dvs. den del av B_1 som ej hör till B_2, är en delmängd av $\sim A$. Det framgår av figuren att under dessa förhållanden det prickade området i mitten, som ju representerar $B_1 \cap B_2$, är sammansatt av två hälfter varav den till vänster representerar $A \cap B_1$ och den till höger $\sim A \cap B_2$. Unionen av dessa, dvs. $(A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2)$ är hela det prickade området, vilket ju även är $B_1 \cap B_2$. Därmed har visats att $(A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2) = B_1 \cap B_2$ under förutsättning att $\sim B_1 \cap B_2 \subset A$ och $B_1 \cap \sim B_2 \subset \sim A$ gäller.

I fallet med studenter vid ett universitet betyder det sagda att det vi ville bevisa gäller när endast manliga studenter kan ha haft mässlingen utan att ha läst nationalekonomi och endast kvinnliga studenter kan ha läst nationalekonomi utan att ha haft mässlingen. Vill vi i ett sådant fall plocka ut de manliga studenterna som läst nationalekonomi och de kvinnliga studenterna som haft mässlingen, kan vi alltså plocka ut samma studenter genom att i stället ta dem som både läst nationalekonomi och haft mässlingen.

Giltigheten av dessa förutsättningar måste nu bevisas, dvs. inte för nationalekonomi och mässling, utan för det andra fallet. Intersektionen $\sim B_1 \cap B_2$ betyder att z skall lyda villkoren $z_1(1+i_S)+z_2>0$ och $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$. Dessa kan skrivas $z_2 > -z_1(1+i_S)$ och $z_2 \leqslant -z_1(1+i_L)$, vilket betyder $-z_1(1+i_S) < -z_1(1+i_L)$ eller $z_1(i_L-i_S)<0$. Eftersom låneräntan är högre än sparräntan är $(i_L-i_S)>0$ och följaktligen blir även $z_1<0$. Med andra ord impliceras att z måste höra till mängden A, dvs. att $z_1 \leqslant 0$. Därmed är

bevisat att alla de vektorer z som hör till $\sim B_1 \cap B_2$ även måste höra till A, dvs. $\sim B_1 \cap B_2 \subset A$.

På samma sätt innebär $B_1 \cap \sim B_2$ ett samtidigt uppfyllande av olikheterna $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_L)+z_2 > 0$. Härav följer $-z_1(1+i_L) < z_2 \leqslant -z_1(1+i_S)$ och $z_1(i_L - i_S) > 0$. Då vi antagit $i_L > i_S$ blir $z_1 > 0$, vilket ju var själva villkoret som definierade komplementet till A. Således är $B_1 \cap \sim B_2 \subset \sim A$. Men därmed är också bevisat att

$$T = (A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2) = B_1 \cap B_2 \tag{3-1}$$

dvs. att villkoren för $\mathbf{z} = [z_1, z_2]$ lyder

$$z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0 \tag{3-2}$$

$$z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0 \tag{3-3}$$

Det hittills förda resonemanget, avseende två perioder, kan väl framställas grafiskt. I följande figur avsätts z_1 på den horisontella axeln och z_2 på den vertikala. Av de bägge räta linjerna genom origo har den brantare lutningen $-(1+i_L)$ och den flackare lutningen $-(1-i_S)$, då ju låneräntan skulle vara högre än sparräntan. Linjernas ekvationer är $z_2 = -(1-i_L)z_1$ och $z_2 = -(1+i_S)z_1$. Alla de punkter i planet, vilka ligger på eller under respektive linjer, lyder villkoren $z_2 \leqslant -(1+i_L)z_1$ och $z_2 \leqslant -(1+i_S)z_1$. Dessa villkor kan även skrivas $z_1(1+i_L)+z_2 \leqslant 0$ och $z_1(1+i_S)+z_2 \leqslant 0$. I denna form definierar de mängderna av vektorer $\mathbf{z} = [z_1, z_2]$, vilka betecknades med B_2 respektive B_1. De punkter som ligger på eller under den brantare linjen, representerar således vektorerna inom mängden B_2, liksom de punkter som ligger på eller under den flackare linjen representerar mängden B_1. De övriga vektorsmängder som förekom i diskussionen var A och dess komplement $\sim A$, definierade genom villkoren $z_1 \leqslant 0$ respektive $z_1 > 0$. Vektorerna inom A representeras sålunda av punkter på eller till vänster om den vertikala axeln, medan vektorerna inom $\sim A$ representeras av övriga punkter i planet.

Intersektionen $A \cap B_1$ motsvaras i figuren av punkter, vilka ligger på eller till vänster om den vertikala axeln, samtidigt som de ligger på eller under linjen med den flackare lutningen, eller, med andra ord, av punkter inom det streckade området. På samma sätt motsvaras $\sim A \cap B_2$ av de punkter, som både ligger till höger om den vertikala axeln och ligger på eller under den brantare linjen, dvs. av punkterna inom det prickade området. Unionen $(A \cap B_1) \cup (\sim A \cap B_2)$ representeras nu av hela området som antingen är streckat eller prickat, dvs. av en konvex kon med spetsen i origo vars gränser har markerats med tjocka linjer. Men denna konvexa kon motsvarar även

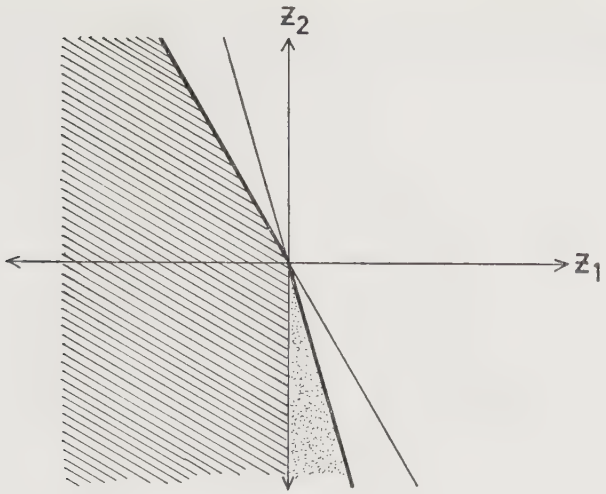


Fig. 6.

intersektionen $B_1 \cap B_2$, ty punkterna inom konen ligger ju på eller under den brantare linjen, samtidigt som de ligger på eller under den flackare linjen. De måste alltså höra till mängden B_1 samtidigt som de hör till mängden B_2.

b) *Härledning av T vid olika in- och utlåningsräntor för tre perioder.*

Vi skall nu fortsätta att behandla samma fall som förut men med den skillnaden att periodantalet ökar från två till tre. Vid tvåperiodanalysen erhöll vi två olika fall, dvs. dels fallet då man inte satte sig i skuld för att öka den första periodens konsumtion och dels fallet då man gjorde det. Anledningen till de två fallen var den att man hade att räkna med två olika räntesatser, beroende på om man mellan den första och den andra periodens slut stod i skuld eller ej. Vid tre perioder erhåller vi uppenbarligen fyra olika fall, ty nu måste vi även ta hänsyn till om det mellan andra och tredje periodernas slut är fråga om skuldsättning eller ej. Generellt gäller att antalet olika sekvenser av skuldsättning och inte skuldsättning under m perioder är 2^{m-1}.

Låt oss nu ta upp de fyra olika sekvenserna i vårt fall. Först har vi sekvensen med icke skuldsättning under såväl andra som tredje perioderna. Det innebär att $z_1 \leqslant 0$, dvs. man lyfter vid första periodens slut inte någon summa i banken, som man senare måste betala igen. Detta betyder att sparräntan är den som blir aktuell för tiden mellan första och andra periodernas slut. Den största summa som man vid andra periodens slut kan lyfta utan att

råka i skuld för tiden fram till tredje periodens slut är därför $-z_1(1+i_S)$. Då någon skuldsättning inte heller skulle komma i fråga under den tredje perioden gäller $z_2 \leqslant -z_1(1+i_S)$. Den största summa z_3 som nu kan lyftas vid slutet av den tredje och i föreliggande fall sista perioden är $-z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S)$, ty det är ju sparräntan som är aktuell även under tredje perioden. Formellt uttryckt är $z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S)$. De tre olikheterna

$$z_1 \leqslant 0,\ z_2 \leqslant -z_1(1+i_S) \quad \text{och} \quad z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S)$$

definierar nu mängden av möjliga vektorer $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ under förutsättning att skuldsättning varken förekommer under andra eller tredje perioderna. De delmängder av det tredimensionella vektorsrummet som avstängs av dessa tre olikheter kallar vi A, B_1 och C_1. De formella definitionerna lyder

$$A = \{\mathbf{z} \in R^3 \,|\, z_1 \leqslant 0\} \tag{3-4}$$

$$B_1 = \{\mathbf{z} \in R^3 \,|\, z_1(1+i_S) + z_2 \leqslant 0\} \tag{3-5}$$

$$C_1 = \{\mathbf{z} \in R^3 \,|\, z_1(1+i_S)^2 + z_2(1+i_S) + z_3 \leqslant 0\} \tag{3-6}$$

De bägge första mängderna har vi kallat A och B_1 eftersom de bestäms av samma olikheter som mängderna med motsvarande beteckningar i tvåperiodfallet. Mängderna med samma beteckningar i två- och treperiodfallen är naturligtvis ej desamma eftersom de är delmängder av olika vektorsrum med respektive två och tre dimensioner. Helt korrekt är det därför inte att ha identiska beteckningar, men riskerna för hopblandning är små, och det är fördelaktigt att begränsa antalet använda beteckningar. De blir många nog ändå. Med de införda beteckningarna gäller att om skuldsättning alls ej förekommer måste det gälla att $\mathbf{z} \in A \cap B_1 \cap C_1$.

Genom en exakt analog härledning, som vi dock ej skall belasta framställningen med, bestäms de möjliga vektorerna, när skuldsättning ej förekommer under andra perioden, men förekommer under tredje perioden. av olikheterna

$$z_1 \leqslant 0,\ z_2 > -z_1(1+i_S) \quad \text{och} \quad z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)\,(1+i_L) - z_2(1+i_L)$$

Mängderna definierade av dessa olikheter betecknas

$$A = \{\mathbf{z} \in R^3 \,|\, z_1 \leqslant 0\} \tag{3-7}$$

$$\sim B_1 = \{\mathbf{z} \in R^3 \,|\, z_1(1+i_S) + z_2 > 0\} \tag{3-8}$$

$$C_2 = \{\mathbf{z} \in R^3 \,|\, z_1(1+i_S)\,(1+i_L) + z_2(1+i_L) + z_3 \leqslant 0\} \tag{3-9}$$

Alltså gäller om skuldsättning endast förekommer under tredje perioden $\mathbf{z} \in A \cap \sim B_1 \cap C_2$.

Om skuldsättningen i stället förekommer under andra perioden, men ej under tredje, blir olikheterna som måste satisfieras

$$z_1 > 0,\ z_2 \leqslant -z_1(1+i_L) \quad \text{och} \quad z_3 \leqslant -z_1(1+i_L)\,(1+i_S) - z_2(1+i_S)$$

Motsvarande mängder blir

$$\sim A = \{\mathbf{z} \in R^3 \mid z_1 > 0\} \tag{3-10}$$

$$B_2 = \{\mathbf{z} \in R^3 \mid z_1(1+i_L) + z_2 \leqslant 0\} \tag{3-11}$$

$$C_3 = \{\mathbf{z} \in R^3 \mid z_1(1+i_S)\,(1+i_L) + z_2(1+i_S) + z_3 \leqslant 0\} \tag{3-12}$$

Villkoret att de tre olikheterna skall satisfieras kan formuleras $\mathbf{z} \in \sim A \cap B_2 \cap C_3$.

Slutligen återstår villkoren när skuldsättning förekommer under både andra och tredje perioden. Olikheterna som skall satisfieras lyder

$$z_1 > 0,\ z_2 > -z_1(1+i_L) \quad \text{och} \quad z_3 \leqslant -z_1(1+i_L)^2 - z_2(1+i_L)$$

Motsvarande mängder definieras

$$\sim A = \{\mathbf{z} \in R^3 \mid z_1 > 0\} \tag{3-13}$$

$$\sim B_2 = \{\mathbf{z} \in R^3 \mid z_1(1+i_L) + z_2 > 0\} \tag{3-14}$$

$$C_4 = \{\mathbf{z} \in R^3 \mid z_1(1+i_L)^2 + z_2(1+i_L) + z_3 \leqslant 0\} \tag{3-15}$$

och villkoret lyder $\mathbf{z} \in \sim A \cap \sim B_2 \cap C_4$.

Nu kan antingen ingen skuldsättning alls förekomma, eller skuldsättning enbart den andra perioden, eller skuldsättning enbart den tredje perioden, eller också skuldsättning under både andra och tredje perioden. Med andra ord blir

$$T = (A \cap B_1 \cap C_1) \cup (A \cap \sim B_1 \cap C_2) \cup (\sim A \cap B_2 \cap C_3) \cup (\sim A \cap \sim B_2 \cap C_4) \tag{3-16}$$

Vi skall visa att detta kan förenklas till

$$T = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \tag{3-17}$$

Beviset är något omständligt. Först noterar vi enligt en vanlig sats i mängdläran att det generellt gäller[1]

[1] Detta kan lätt visas med Venndiagram. Det som skall visas är $(F \cap G) \cup (F \cap H) = F \cap (G \cup H)$ Låt F, G och H vara de tre ringarna i figuren a). Då blir det vertikalstreckade området $F \cap G$ och det horisontalstreckade området $F \cap H$, medan hela det streckade området blir $(F \cap G) \cup (F \cap H)$. Det streckade området i figuren b) är $G \cup H$, medan den del av detta område som faller innanför F är $F \cap (G \cup H)$. Jämföras de bägge figurerna inses lätt att det sagda stämmer.

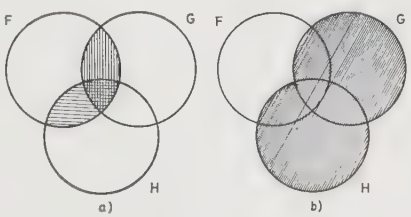


Fig. 7.

$$(A \cap (B_1 \cap C_1)) \cup (A \cap (\sim B_1 \cap C_2)) = A \cap ((B_1 \cap C_1) \cup (\sim B_1 \cap C_2)) \quad (3\text{-}18)$$

liksom

$$(\sim A \cap (B_2 \cap C_3)) \cup (\sim A \cap (\sim B_2 \cap C_4)) = \sim A \cap ((B_2 \cap C_3) \cup (\sim B_2 \cap C_4)) \quad (3\text{-}19)$$

Vidare framgår av vårt tidigare resonemang med hjälp av fig. 5 i samband med tvåperiodfallet att

$$(B_1 \cap C_1) \cup (\sim B_1 \cap C_2) = C_1 \cap C_2 \quad (3\text{-}20)$$

under förutsättning av

$$\sim C_1 \cap C_2 \subset B_1 \quad \text{och} \quad C_1 \cap \sim C_2 \subset \sim B_1 \quad (3\text{-}21)$$

Vi vet nu att C_1 definieras genom $z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S)$ och alltså $\sim C_1$ genom $z_3 > -z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S)$. Vidare vet vi att C_2 definieras genom $z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)\,(1+i_L) - z_2(1+i_L)$. Med andra ord betyder $\mathbf{z} \in \sim C_1 \cap C_2$ att

$$-z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S) < z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)\,(1+i_L) - z_2(1+i_L) \quad (3\text{-}22)$$

eller förenklat att

$$(z_1(1+i_S) + z_2)\,(i_L - i_S) < 0 \quad (3\text{-}23)$$

Eftersom $i_L > i_S$ gäller att $z_1(1+i_S) + z_2 < 0$ och följaktligen även att $z_1(1+i_S) - z_2 \leqslant 0$, vilket definierade B_1. Därmed är bevisat att $\sim C_1 \cap C_2 \subset B_1$.

Väljer vi i stället de olikheter som definierar $C_1 \cap \sim C_2$ erhålles

$$-z_1(1+i_S)\,(1+i_L) - z_2(1+i_L) < z_3 \leqslant -z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S) \quad (3\text{-}24$$

eller förenklat

$$(z_1(1+i_S) + z_2)\,(i_L - i_S) > 0 \quad (3\text{-}25)$$

vilket betyder att $z_1(1+i_S) + z_2 > 0$, dvs. att den olikhet som definierar $\sim B_1$ är uppfylld. Således gäller även $C_1 \cap \sim C_2 \subset B_1$, varför villkoren är uppfyllda för att $(B_1 \cap C_1) \cup (\sim B_1 \cap C_2) = C_1 \cap C_2$. På precis analogt sätt visas att $(B_2 \cap C_3) \cup (\sim B_2 \cap C_4) = C_3 \cap C_4$. Eftersom beviset för detta steg är en direkt upprepning av föregående skall vi utelämna det. Med de hittills förda resonemangen har vi visat att

$$T = (A \cap (C_1 \cap C_2)) \cup (\sim A \cap (C_3 \cap C_4)) \quad (3\text{-}26)$$

Det återstår nu ytterligare ett steg för att visa

$$T = (C_1 \cap C_2) \cap (C_3 \cap C_4) \quad (3\text{-}26\text{a})$$

Vi kan nu återigen tillämpa slutsatserna från fig. 5 ovan. Under förutsättning att

$$\sim(C_1 \cap C_2) \cap (C_3 \cap C_4) \subset A \tag{3-27}$$

och

$$(C_1 \cap C_2) \cap \sim(C_3 \cap C_4) \subset \sim A \tag{3-28}$$

gäller nämligen det vi till sist ville visa.

Vad betyder då villkoren (3-27) och (3-28)? Låt oss till en början i detalj undersöka den förra av dem. Först observerar vi att

$$\sim(C_1 \cap C_2) = (\sim C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap \sim C_2) \cup (\sim C_1 \cap \sim C_2) \tag{3-29}$$

ty »universum», som i vårt fall är hela det tredimensionella vektorsrummet R^3, är ju uppdelat i de fyra delmängderna $(C_1 \cap C_2)$, $(\sim C_1 \cap C_2)$, $(C_1 \cap \sim C_2)$ och $(\sim C_1 \cap \sim C_2)$. Enligt (3-29) blir

$$\sim(C_1 \cap C_2) \cap (C_3 \cap C_4) = ((\sim C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap \sim C_2) \cup (\sim C_1 \cap \sim C_2)) \cap (C_3 \cap C_4) \tag{3-30}$$

Vi kan nu åter tillämpa slutsatsen från noten på s. 55.[1] Därvid erhålles

$$\begin{aligned}((\sim C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap \sim C_2) \cup (\sim C_1 \cap \sim C_2)) \cap (C_3 \cap C_4) \\ = (\sim C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) \cup (C_1 \cap \sim C_2 \cap C_3 \cap C_4) \cup (\sim C_1 \cap \sim C_2 \cap C_3 \cap C_4)\end{aligned} \tag{3-31}$$

Det uttryck vi nu har erhållit är en union av tre intersektioner mellan fyra mängder vardera. Om vi kan visa att alla tre intersektionerna är delmängder av A, gäller detta naturligtvis även deras union. Om, med andra ord,

$$\sim C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \subset A \tag{3-32}$$

$$C_1 \cap \sim C_2 \cap C_3 \cap C_4 \subset A \tag{3-33}$$

$$\sim C_1 \cap \sim C_2 \cap C_3 \cap C_4 \subset A \tag{3-34}$$

gäller följer det att även uttrycket (3-31), dvs. deras union, är en delmängd av A. Men eftersom detta uttryck enligt (3-30) är detsamma som $\sim(C_1 \cap C_2) \cap (C_3 \cap C_4)$, gäller att

$$\sim(C_1 \cap C_2) \cap (C_3 \cap C_4) \subset A$$

Sålunda gäller (3-27) under förutsättning av (3-32), (3-33) och (3-34).

[1] Enligt denna var $(F \cap G) \cup (F \cap H) = F \cap (G \cup H)$. Genom att tillämpa samma regel två gånger i följd erhålles

$$\begin{aligned}(F \cap G) \cup (F \cap H) \cup (F \cap K) &= (F \cap (G \cup H)) \cup (F \cap K) \\ &= F \cap (G \cup H \cup K)\end{aligned}$$

Betrakta nu (3-32). Vi skall visa att intersektionen av de fyra mängderna $\sim C_1$, C_2, C_3 och C_4 är en delmängd av A. Eftersom intersektionen betyder att vi söker de medlemmar i de fyra mängderna, vilka hör till samtliga på en gång, räcker det om vi kan visa att intersektionen mellan vilka två som helst av dessa fyra mängder hör till A. Hänsynstagande till de återstående mängderna kan endast ytterligare inskränka intersektionsmängden, men kan ej föra in ytterligare medlemmar. Den enda komplikationen som kan synas inträffa är om hänsynstagande till de bägge övriga mängderna direkt motsäger villkoret att intersektionen hör till A, men i så fall blir intersektionen helt enkelt en tom mängd, dvs. den innehåller inga medlemmar alls. Detta är emellertid inte något problem ty den tomma mängden är enligt definition en delmängd av alla icke-tomma delmängder och alltså även av A. Om vi alltså kan visa att $\sim C_1 \cap C_3 \subset A$ gäller (3-32), liksom (3-33) gäller under förutsättning att $\sim C_2 \cap C_4 \subset A$. Villkoret (3-34) måste gälla om bara endera av $\sim C_1 \cap C_3 \subset A$ och $\sim C_2 \cap C_4 \subset A$ gäller. Således måste (3-32) (3-33) och (3-34) vara riktiga, och därför även (3-27), under förutsättning att

$$\sim C_1 \cap C_3 \subset A \tag{3-35}$$

och

$$\sim C_2 \cap C_4 \subset A \tag{3-36}$$

Det återstår slutligen att visa giltigheten av (3-35) och (3-36). Enligt definition, (3-6) ovan, bestäms $\sim C_1$ av $z_3 > -z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S)$, och enligt (3-12) bestäms C_3 av $z_3 \leqslant -z_1(1+i_L)\,(1+i_S) - z_2(1+i_S)$. Alltså förutsättes för $\mathbf{z} \in \sim C_1 \cap C_3$ att

$$-z_1(1+i_S)^2 - z_2(1+i_S) < z_3 \leqslant -z_1(1+i_L)\,(1+i_S) - z_2(1+i_S) \tag{3-37}$$

eller förenklat

$$z_1(1+i_S)\,(i_L - i_S) < 0 \tag{3-38}$$

vilket innebär $z_1 < 0$ när $i_L > i_S$. Men om $z_1 < 0$, gäller även $z_1 \leqslant 0$ som definierade mängden A enligt (3-7) ovan. Med andra ord impliccrar $\mathbf{z} \in \sim C_1 \cap C_3$ att $\mathbf{z} \in A$, eller annorlunda uttryckt $\sim C_1 \cap C_3 \subset A$. Giltigheten av (3-35) har därmed visats.

På samma sätt bevisas (3-36). Enligt (3-9) bestäms $\sim C_2$ av $z_3 > -z_1(1+i_S)(1+i_L) - z_2(1+i_L)$ och, enligt (3-15), C_4 av $z_3 \leqslant -z_1(1+i_L)^2 - z_2(1+i_L)$. För $\mathbf{z} \in \sim C_2 \cap C_4$ fordras

$$-z_1(1+i_S)\,(1+i_L) - z_2(1+i_L) < z_3 \leqslant -z_1(1+i_L)^2 - z_2(1+i_L) \tag{3-39}$$

eller förenklat

$$z_1(1+i_L)\,(i_L - i_S) < 0 \tag{3-40}$$

vilket betyder $z_1 < 0$ och alltså $\mathbf{z} \in A$. Annorlunda uttryckt gäller (3-36), dvs. $\sim C_2 \cap C_4 \subset A$. Men i och med detta sista steg, avsett att visa giltigheten av villkoren (3-35) och (3-36) har vi sett att (3-27) gäller.

På samma sätt visas — eftersom beviset för (3-27) har varit långdraget skall vi ej upprepa det för (3-28) — att $(C_1 \cap C_2) \cap \sim(C_3 \cap C_4) \subset A$. Därmed är villkoren (3-27) och (3-28) uppfyllda, varigenom

$$T = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \tag{3-41}$$

Därmed är hela det långa beviset slutfört. Vid tre perioder bestäms sålunda de möjliga transformationsvektorerna $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ genom följande olikheter

$$z_1(1+i_S)^2 + z_2(1+i_S) + z_3 \leqslant 0 \tag{3-42}$$

$$z_1(1+i_S)\,(1+i_L) + z_2(1+i_L) + z_3 \leqslant 0 \tag{3-43}$$

$$z_1(1+i_L)\,(1+i_S) + z_2(1+i_S) + z_3 \leqslant 0 \tag{3-44}$$

$$z_1(1+i_L)^2 + z_2(1+i_L) + z_3 \leqslant 0 \tag{3-45}$$

Detta liknar ju vad som gällde för två perioder, där vi hade

$$z_1(1+i_S) + z_2 \leqslant 0 \tag{3-2}$$

$$z_1(1+i_L) + z_2 \leqslant 0 \tag{3-3}$$

Generellt gäller det att transformationsvektorerna skall satisfiera 2^{m-1} lineära olikheter när antalet perioder är m. Uttrycken till vänster om olikhetstecknen är i så fall de sammanlagda framräknade värdena vid tidpunkten m av alla in- och utbetalningarna $z_1, \ldots, z_m$. Det finns nu inte längre något entydigt kapitalvärde för en viss serie av betalningar, utan det finns lika många kapitalvärdesdefinitioner som det finns olika sekvenser av skuldsättning och icke skuldsättning under $m-1$ perioder, dvs. 2^{m-1}. För att en transformationsvektor $\mathbf{z}$ skall vara möjlig, fordras alltså att inte något av de kapitalvärden som kan kalkyleras från $\mathbf{z}$ får vara positivt. Detta är en generell regel som gäller för varje värde på m. Härledningen av villkoren kan göras efter samma principer som vid två och tre perioder, men den blir mer långdragen ju större antalet perioder är. En kortfattad generell härledning följer emellertid nedan under c).

Liksom i tvåperiodfallet kan resonemanget illustreras grafiskt, nu naturligtvis med en tredimensionell figur. Som ledning till tolkningen av denna figur kan sägas, att den grafiska motsvarigheten till den mängd vektorer, som är möjliga när man inte lånar under någon period, dvs. till $A \cap B_1 \cap C_1$, utgöres av den rymd som till höger avgränsas av planen $OJLMH$, $OBIJ$ och $OHAB$. När lån endast förekommer under andra perioden, motsvaras den då

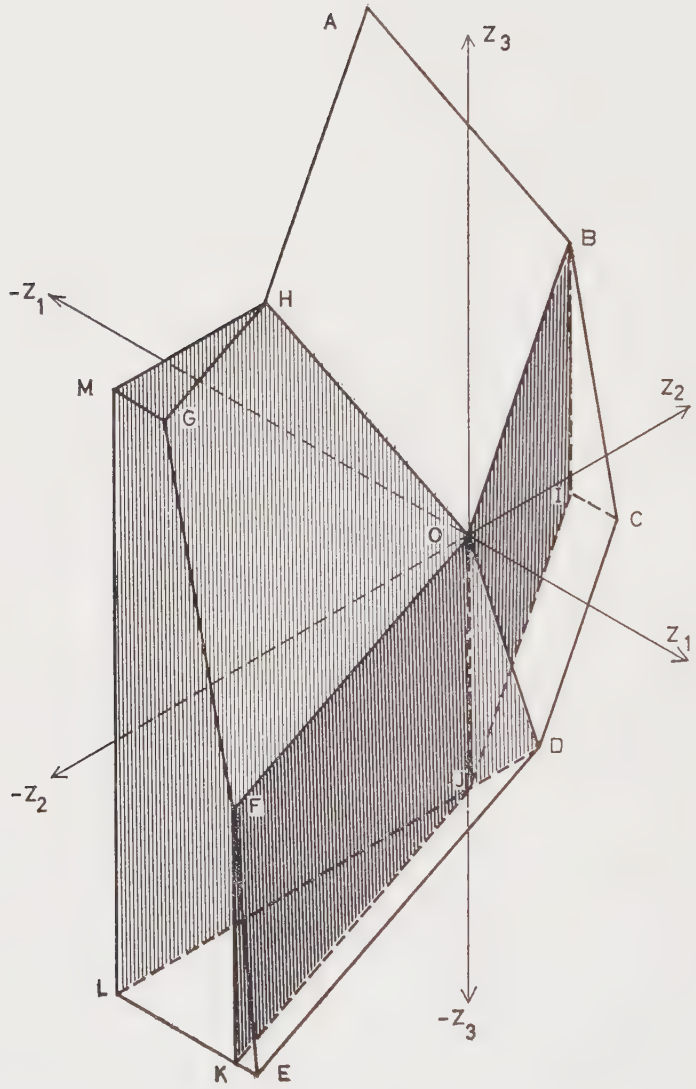


Fig. 8.

aktuella mängden $A \cap \sim B_1 \cap C_2$ av en rymd som till höger avgränsas av planen ODJ och $OBCD$ samt till vänster avgränsas av planet $OBIJ$. När i stället lån endast förekommer under första perioden, blir mängden $\sim A \cap B_2 \cap C_3$ aktuell, vilken i figuren motsvaras av den rymd som till höger avgränsas av planen $OJKF$ och $OFGH$ samt till vänster avgränsas av planet $OJLMH$. Det fall slutligen, då lån förekommer under bägge pe-

rioderna, avses med mängden $\sim A \cap \sim B_2 \cap C_4$. Denna mängd motsvaras i figuren av den rymd som till höger avgränsas av *ODEF* samt till vänster avgränsas av *ODJ* och *OJKF*.

Tas det hänsyn till samtliga fallen, är det alltså möjligt att välja en punkt inom vilken som helst av de fyra rymderna. Av figuren framgår att dessa fyra rymder tillsammans utgör hela den rymd som till höger avgränsas av planen *OHAB*, *OBCD*, *OFGH* och *ODEF*. Dessa plan utgör emellertid avgränsningarna till höger av respektive mängderna C_1, C_2, C_3 och C_4, vilket innebär att vi kan bestämma de möjliga vektorerna genom att fordra samtidig satisfaktion av de olikheter som definierar C_1, C_2, C_3 och C_4.

c) *Härledning av T vid olika in- och utlåningsräntor för godtyckligt periodantal.*

Vi skall nu härleda villkoren för T när periodantalet är m under samma förutsättningar som tidigare vid 2 och 3 perioder. Låt ett index r_t vara antingen S, när det ej lånas under perioden t, eller L, när det lånas under denna. Bilda sedan $(m-1)$-tupeln $\mathbf{r}=[r_2,\ldots,r_m]$. Detta $\mathbf{r}$ betecknar tydligen en icke specificerad serie av upplåning och icke-upplåning under den tid planeringen omfattar.

Betrakta härnäst den cartesianska produkten av $(m-1)$ likadana mängder vardera utgörande $\{S, L\}$. Produktmängden, som skall betecknas M, kommer att bestå av alla de olika $\mathbf{r}$ som kan bildas när $r_t=S, L$ för $t=2,\ldots, m$. Kardinaltalet för M, dvs. antalet medlemmar inom mängden, uppgår till 2^{m-1}. Vi kan således använda $\mathbf{r}$ som en indicering på olika storheter för att ange att de hänför sig till en bestämd, men icke specificerad, serie av upplåning och icke upplåning under de olika perioderna. För att specificera olika serier av upplåning och icke upplåning användes toppindex, dvs. vi skriver $\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{r}^{(2)}$ etc. Alla dessa olika $\mathbf{r}$ hör till mängden M, ett villkor som uttryckes med $\mathbf{r}\in M$.

Med i_{r_t} betecknas nu räntesatsen som gäller under perioden t. Denna kan som synes vara antingen i_S eller i_L beroende på om $r_t=S$ eller $r_t=L$. Vi definierar även de enperiodiga räntefaktorerna $I_{r_t}=1+i_{r_t}$. Härnäst definieras de flerperiodiga räntefaktorerna $X_{\mathbf{r}}^{t,\tau}=I_{r_t}\ldots I_{r_\tau}$ för $t<\tau$. Dessa är således räntefaktorer för hela tiden fr.o.m. period t t.o.m. period τ, varvid $\mathbf{r}$ bestämmer hela serien av räntesatser vilka kommer till användning. För att utmärka räntefaktorer vid olika serier av räntesatser skriver vi $X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t,\tau}$, $X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{t,\tau}$ etc. Det bör emellertid observeras att indiceringen med $\mathbf{r}=[r_2,\ldots,r_m]$ är för stark då $t>2$ eller $\tau<m$. Således blir $X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t,\tau}=X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{t,\tau}$ ej endast vid $\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}^{(2)}$, dvs. när $r_2^{(1)}=r_2^{(2)},\ldots,r_m^{(1)}=r_m^{(2)}$, utan alltid då $r_t^{(1)}=r_t^{(2)},\ldots,r_\tau^{(1)}=r_\tau^{(2)}$.

Ovan definierades $X_{\mathbf{r}}^{t,\tau}$ endast för $t<\tau$. När $t=\tau$ blir räntefaktorerna enperiodiga, dvs. lika med I_{r_t}. Det är lämpligt att utsträcka definitionen till ytterligare ett fall, nämligen det då $t=\tau+1$. Därvid sättes $X_{\mathbf{r}}^{\tau+1,\tau}=1$. Räntefaktorerna under tidsintervallet t,τ är således definierade vid alla $t=2,...,m$ och $\tau=2,...,m$ i sådana kombinationer att $t\leqslant\tau+1$.

Med hjälp av räntefaktorerna kan vi nu lätt uttrycka kapitalvärdena av en transformationsvektor $\mathbf{z}=[z_1,...,z_m]$ beräknade till tidpunkten m vid olika $\mathbf{r}$, dvs. olika serier av aktuella räntesatser under perioderna $2,...,m$. Dessa kapitalvärden betecknas

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z})=\sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t+1,m} \tag{3-46}$$

På samma sätt kan vi definiera kapitalvärdet vid tidpunkten $\tau<m$ av de τ första betalningarna i serien $z_1,...,z_m$. Alltså

$$K_{\mathbf{r}}^{\tau}(\mathbf{z})=\sum_{t=1}^{\tau} z_t X_{\mathbf{r}}^{t+1,\tau} \tag{3-47}$$

Ifall nu $K_{\mathbf{r}}^{\tau}(\mathbf{z})\leqslant 0$, betyder det att lån ej förekommer under perioden $(\tau+1)$, dvs. att $r_{\tau+1}=S$. Likaså betyder $K_{\mathbf{r}}^{\tau}(\mathbf{z})>0$ att $r_{\tau+1}=L$. En viss kombination av upplåning och icke upplåning under den tid för vilken planeringen sker, karakteriseras av att $K_{\mathbf{r}}^{\tau}(\mathbf{z})\leqslant 0$ om $r_{\tau+1}=S$ och $K_{\mathbf{r}}^{\tau}(\mathbf{z})>0$ om $r_{\tau+1}=L$ för $\tau=1,...,m-1$. Konjunktionen av dessa $(m-1)$ villkor vid varje särskilt $\mathbf{r}$ bestämmer en delmängd inom R^m av transformationsvektorer $\mathbf{z}$. Denna delmängd betecknas $B_{\mathbf{r}}$ och den omfattar helt enkelt alla de olika transformationsvektorer $\mathbf{z}$, representerande olika serier av bankinsättningar och uttag, som är sådana att skuldsättning och icke skuldsättning till banken förekommer under de olika perioderna i den kombination som anges av $\mathbf{r}$.

Vidare gäller vid varje kombination $\mathbf{r}$ att $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z})\leqslant 0$, dvs. kapitalvärdet av den hela transformationsvektorn vid tidpunkten m skall vara icke-positivt. De olika transformationsvektorer $\mathbf{z}$ som uppfyller detta villkor bildar tillsammans en delmängd av R^m som vi betecknar $C_{\mathbf{r}}$.

Därmed har tillräckligt med beteckningar införts för att vi skall kunna skriva transformationsmängden T. Denna är

$$T=\bigcup_{\mathbf{r}\in M}(B_{\mathbf{r}}\cap C_{\mathbf{r}}) \tag{3-48}$$

där $\bigcup_{\mathbf{r}\in M}$ betecknar unionen av parenteserna för alla $\mathbf{r}\in M$. Detta är helt i analogi till vad som gällde för två och tre perioder. Liksom i dessa fall skall vi nu visa att

$$\bigcup_{\mathbf{r}\in M}(B_{\mathbf{r}}\cap C_{\mathbf{r}})=\bigcap_{\mathbf{r}\in M}C_{\mathbf{r}} \tag{3-49}$$

Beviset göres i två steg. Först skall vi bevisa att det för varje par av kombinationer $\mathbf{r}^{(1)}$ och $\mathbf{r}^{(2)}$ gäller

$$C_{\mathbf{r}^{(1)}}\cap\sim C_{\mathbf{r}^{(2)}}\subset\sim B_{\mathbf{r}^{(1)}} \tag{3-50}$$

Vi definierade $C_{\mathbf{r}^{(1)}}$ genom villkoret $K_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z})\leqslant 0$. Komplementet till $C_{\mathbf{r}^{(2)}}$ bestäms genom negationen av det villkor som bestämmer $C_{\mathbf{r}^{(2)}}$, dvs. genom $K_{\mathbf{r}^{(2)}}(\mathbf{z})>0$. De bägge villkoren sammantagna implicerar

$$K_{\mathbf{r}^{(2)}}(\mathbf{z})-K_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z})>0 \tag{3-51}$$

Insättas definitionerna av dessa kapitalvärden erhåller vi

$$\sum_{t=1}^{m}z_tX_{\mathbf{r}^{(2)}}^{t+1,\,m}-\sum_{t=1}^{m}z_tX_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,m}>0 \tag{3-52}$$

Det gäller emellertid att

$$\sum_{\tau=1}^{m-1}\left(\sum_{t=1}^{\tau}z_tX_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,\tau}\right)\left(I_{r_{\tau+1}^{(2)}}-I_{r_{\tau+1}^{(1)}}\right)X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+2,\,m}=\sum_{t=1}^{m}z_tX_{\mathbf{r}^{(2)}}^{t+1,\,m}-\sum_{t=1}^{m}z_tX_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,m} \tag{3-53}$$

De bägge leden i ekvationen ser i förstone ganska olika ut. När summorna skrivas ut blir antalet termer i det förra ledet avsevärt större än i det senare ledet. Emellertid tar alla de överflödiga termerna ut varandra parvis så att ekvationens bägge led blir lika.[1]

[1] Härledningen av (3-53) går formellt till på följande vis.

$$\sum_{\tau=1}^{m-1}\left(\sum_{t=1}^{\tau}z_t\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,\tau}\right)\cdot\left(I_{r_{\tau+1}^{(2)}}-I_{r_{\tau+1}^{(1)}}\right)\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+2,\,m}$$

$$=\sum_{\tau=1}^{m-1}\left(\sum_{t=1}^{\tau}z_t\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,\tau}\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+1,\,m}\right)-\sum_{\tau=1}^{m-1}\left(\sum_{t=1}^{\tau}z_t\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,\tau+1}\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+2,\,m}\right)$$

$$=z_1\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{2,\,1}\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{2,\,m}+\sum_{\tau=2}^{m-1}\left(\sum_{t=1}^{\tau}z_t\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,\tau}\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+1,\,m}\right)$$

$$-\sum_{\tau=1}^{m-2}\left(\sum_{t=1}^{\tau}z_t\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,\tau+1}\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+2,\,m}\right)-\sum_{t=1}^{m-1}z_t\cdot X_{\mathbf{r}^{(1)}}^{t+1,\,m}\cdot X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{m+1,\,m}$$

Nu utnyttjas definitionen att alla diskonteringsfaktorer av typen $X_{\mathbf{r}}^{t+1,\,t}=1$. Vidare ändras summationsindex τ till $\tau-1$ i den senare av de bägge åsterstående dubbel-

Vi kan i det förra ledet insätta $K^{\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z}) - \sum_{t=1}^{\tau} z_t X^{t+1,\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}$, varvid vi erhåller

$$\sum_{\tau=1}^{m-1} K^{\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z}) \cdot (I_{r^{(2)}_{\tau+1}} - I_{r^{(1)}_{\tau+1}}) X^{\tau+2,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} > 0 \tag{3-54}$$

För att denna summa av $(m-1)$ termer skall vara positiv fordras att

$$K^{\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z}) \cdot (I_{r^{(2)}_{\tau+1}} - I_{r^{(1)}_{\tau+1}}) X^{\tau+2,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} > 0 \tag{3-55}$$

gäller för åtminstone ett $\tau = 1, \ldots, m-1$.

Nu bestämdes emellertid mängden $B_{\mathbf{r}^{(1)}}$ av att $K^{\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z}) \leqslant 0$ när $r^{(1)}_{\tau+1} = S$ och av att $K^{\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z}) > 0$ när $r^{(1)}_{\tau+1} = L$ för alla $\tau = 1, \ldots, m-1$. I det förra fallet är $I_{r^{(1)}_{\tau+1}} = I_S$, medan det kan gälla att $I_{r^{(2)}_{\tau+1}} = I_L$ eller $I_{r^{(2)}_{\tau+1}} = I_S$. Det betyder att $(I_{r^{(2)}_{\tau+1}} - I_{r^{(1)}_{\tau+1}}) \geqslant 0$ då ju $I_L \geqslant I_S$. På samma sätt gäller i det senare fallet att $(I_{r^{(2)}_{\tau+1}} - I_{r^{(1)}_{\tau+1}}) \leqslant 0$.

Med andra ord är $K^{\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}}(\mathbf{z})(I_{r^{(2)}_{\tau+1}} - I_{r^{(1)}_{\tau+1}}) \leqslant 0$ för samtliga $\tau = 1, \ldots, m-1$

---

summorna. Dess värde ändras ej om vi samtidigt ändrar intervallgränserna för summationen. Hela uttryckets värde blir då:

$$z_1 \cdot X^{2,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} + \sum_{\tau=2}^{m-1} \left(\sum_{t=1}^{\tau} z_t \cdot X^{t+1,\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}} \cdot X^{\tau+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} \right)$$

$$- \sum_{\tau=2}^{m-1} \left(\sum_{t=1}^{\tau-1} z_t \cdot X^{t+1,\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}} \cdot X^{\tau+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} \right) - \sum_{t=1}^{m-1} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(1)}}$$

$$= z_1 \cdot X^{2,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} + \sum_{\tau=2}^{m-1} (z_\tau \cdot X^{\tau+1,\,\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}} \cdot X^{\tau+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}}) - \sum_{t=1}^{m-1} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(1)}}$$

$$= \sum_{t=1}^{m-1} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} - \sum_{t=1}^{m-1} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(1)}}$$

Det senaste ledet har erhållits genom att $X^{\tau+1,\,\tau}_{\mathbf{r}^{(1)}} = 1$ insatts, samt genom att de bägge första termerna i närmast föregående led sammanförts till en summa med summationsindex ändrat från τ till t. Till det erhållna uttrycket kan vi nu lägga $(z_m - z_m)$ utan att dess värde ändras. Eftersom $X^{m+1,\,m}_{\mathbf{r}} = 1$ gäller det sagda även för $(z_m \cdot X^{m+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} - z_m \cdot X^{m+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(1)}})$, varför slutligen

$$\sum_{t=1}^{m-1} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} - \sum_{t=1}^{m-1} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(1)}} = \sum_{t=1}^{m} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(2)}} - \sum_{t=1}^{m} z_t \cdot X^{t+1,\,m}_{\mathbf{r}^{(1)}}$$

Men därmed har hela härledningen av (3-53) genomförts.

när de villkor som definierar $B_{\mathbf{r}^{(1)}}$ gäller. Eftersom vidare $X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+2,\,m} > 0$ för alla $\tau = 1, \ldots, m-1$, förutsätter de villkor som definierar $B_{\mathbf{r}^{(1)}}$ att

$$K_{\mathbf{r}^{(1)}}^{\tau}(\mathbf{z}) \cdot (I_{r_{\tau+1}^{(2)}} - I_{r_{\tau+1}^{(1)}}) X_{\mathbf{r}^{(2)}}^{\tau+2,\,m} \leqslant 0 \tag{3-56}$$

gäller för samtliga $\tau = 1, \ldots, m-1$. Så snart detta villkor ej är uppfyllt för åtminstone ett τ, är i stället de villkor som definierar komplementet $\sim B_{\mathbf{r}^{(1)}}$ uppfyllda.

Därmed gäller att konjunktionen av de villkor, som bestämmer $C_{\mathbf{r}^{(1)}}$ och $\sim C_{\mathbf{r}^{(2)}}$, implicerar de villkor, som bestämmer $\sim B_{\mathbf{r}^{(1)}}$. Får mängdbeteckningarna även symbolisera de villkor som definierar desamma lyder det sagda i satslogisk formulering

$$C_{\mathbf{r}^{(1)}} \wedge \sim C_{\mathbf{r}^{(2)}} \rightarrow \sim B_{\mathbf{r}^{(1)}} \tag{3-57}$$

Motsvarande uttryck i mängdläran lyder

$$C_{\mathbf{r}^{(1)}} \cap \sim C_{\mathbf{r}^{(2)}} \subset \sim B_{\mathbf{r}^{(1)}} \tag{3-58}$$

Därmed har första delen av beviset slutförts.

För den andra delen av beviset skall vi temporärt ersätta symbolen ' $\cap$ ' med multiplikationstecknet och ' $\cup$ ' med additionstecknet. För komplement väljer vi i stället för '$\sim$' det enklare primtecknet. Talet 1 får symbolisera universum eller allklassen, i vårt fall det m-dimensionella euklideiska rummet, medan talet 0 får beteckna den tomma mängden. Därvid kan vi tillämpa en »Boole's algebra» där räknereglerna i rätt hög grad svarar mot den vanliga algebrans.[1]

Vidare skall vi numrera alla de olika sekvenserna av indices $\mathbf{r}$ från 1 till $n = 2^{m-1}$. Ett icke specificerat nummer skrivs v, där alltså $v = 1, \ldots, n$. Denna numrering behöver ej ske i någon bestämd ordning. Det enda som behövs är en hopparning av de n första naturliga talen med var sitt $\mathbf{r}$ inom mängden M. Eftersom denna mängd hade kardinaltalet 2^{m-1}, blir även antalet olika indexsekvenser lika med n.

Det just härledda villkoret kan skrivas

$$C_{v_1} C'_{v_2} \subset B'_{v_1} \tag{3-59}$$

där de naturliga talen v_1 och v_2 svarar mot de olika sekvenserna $\mathbf{r}^{(1)}$ respektive $\mathbf{r}^{(2)}$. Annorlunda uttryckt blir

$$B_{v_1} C_{v_1} C'_{v_2} = 0 \tag{3-60}$$

[1] Om dessa räkneregler se, R. G. D. Allen, »Basic Mathematics», 1962, s. 94.

Detta gäller för samtliga $v_1 = 1, ..., n$ och $v_2 = 1, ..., n$ sådana att $v_1 \neq v_2$.

Mängden T kan i den nya formuleringen skrivas:

$$T = B_1C_1 + ... + B_nC_n \tag{3-61}$$

Detta uttryck skall visas vara lika med $C_1 ... C_n$. Därför skall vi först utvidga uttrycket.[1]

Beteckna med D_v den logiska produkten $C_1 ... C_{v-1}C_{v+1} ... C_n$ och med C den logiska produkten $C_1 ... C_n$. Med andra ord gäller $C_vD_v = C$.

Multiplicera nu varje term i den logiska summan ovan med $(D_v + D_v') = 1$. Parentesen utgör en logisk summa av en klass och dess eget negat, vilket ger allklassen. Vidare kan vi ersätta varje term ovan med den logiska produkten mellan den och allklassen, emedan detta ger termen själv. Sålunda är

$$(B_1C_1 + ... + B_nC_n) = (B_1C_1D_1 + ... + B_nC_nD_n) + (B_1C_1D_1' + ... + B_nC_nD_n') \tag{3-62}$$

Nu har vi ovan sett att $C_vD_v = C$ för alla $v = 1, ..., n$. Den förra parentesen övergår då till $(B_1 + ... + B_n)C$. Vidare gäller $(B_1 + ... + B_n) = 1$ eftersom ju B_v motsvarar de olika fallen av upplånings- och icke-upplåningskombinationer och för $v = 1, ..., n$ tillsammans uttömmer alla möjligheter. Därför kan vi skriva

$$B_1C_1 + ... + B_nC_n = C + (B_1C_1D_1' + ... + B_nC_nD_n') \tag{3-63}$$

Nu gällde emellertid att $D_v = C_1 ... C_{v-1}C_{v+1} ... C_n$. Enligt De Morgans formler blir således[2]

$$D_v' = (C_1' + ... + C_{v-1}' + C_{v+1}' + ... + C_n') \tag{3-64}$$

Således blir

$$B_vC_vD_v' = B_vC_vC_1' + ... + B_vC_vC_{v-1}' + B_vC_vC_{v+1}' + ... + B_vC_vC_n' \tag{3-65}$$

Men eftersom vi har sett att $B_{v_1}C_{v_1}C_{v_2}' = 0$ för alla $v_1 = 1, ..., n$ och $v_2 = 1, ..., n$ där $v_1 \neq v_2$ erhålles

$$B_vC_vD_v' = 0 \text{ för alla } v = 1, ..., n \tag{3-66}$$

Därför blir slutligen

$$T = B_1C_1 + ... + B_nC_n = C + 0 = C = C_1 ... C_n \tag{3-67}$$

[1] Om utvidgning se Konrad Marc-Wogau, »Modern logik», 1961, s. 102 ff.

[2] Om De Morgans formler se Marc-Wogau, a. a., s. 97.

Detta skulle ju bevisas, ty skrivet på det ursprungliga sättet erhåller vi

$$T = \bigcup_{\mathbf{r} \in M} (B_{\mathbf{r}} \cap C_{\mathbf{r}}) = \bigcap_{\mathbf{r} \in M} C_{\mathbf{r}} \tag{3-68}$$

Ytterligare annorlunda skrivet gäller att $\mathbf{z}$ måste uppfylla villkoren

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) \leqslant 0 \text{ för alla } \mathbf{r} \in M \tag{3-69}$$

där $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t+1, m}$ betecknar det på visst sätt till m kalkylerade kapitalvärdet av $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]$. Kapitalvärdet skall alltså vara icke-positivt beräknat på vart och ett av de $n = 2^{m-1}$ olika sätten.

d) *Specialfall: in- och utlåningsräntorna sammanfaller*

Ifall in- och utlåningsräntorna sammanfaller kan vi skriva $i_{r_t} = i$ för alla $t = 2, \ldots, m$. Därvid blir $I_{r_t} = (1 + i)$ och $X_{\mathbf{r}}^{t, \tau} = I_{r_t} \cdot \ldots \cdot I_{r_\tau} = (1 + i)^{\tau - t + 1}$. Kapitalvärdet av $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]$ vid tidpunkten m kan skrivas

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t+1, m} = \sum_{t=1}^{m} z_t (1 + i)^{m-t} \tag{3-70}$$

Som synes blir uttrycket $\sum_{t=1}^{m} z_t (1 + i)^{m-t}$ detsamma oavsett vilken indexsekvens $\mathbf{r} \in M$ vi väljer. Ett entydigt kapitalvärde kan definieras i detta fall och villkoret för transformationsvektorn kan därför skrivas som en enda lineär olikhet, nämligen

$$\sum_{t=1}^{m} z_t (1 + i)^{m-t} \leqslant 0 \tag{3-71}$$

e) *Specialfall: lån är ej möjliga och sparande kan endast ske genom tesaurering*

Ifall lån alls inte kan upptas kan situationen beskrivas genom en oändligt hög låneränta. Om vidare tesaurering utgör den enda depositionsmöjligheten blir sparräntan 0. Således gäller $i_L = \infty$, $i_S = 0$. Det sagda betyder att $I_{r_t} = (1 + i_{r_t})$ erhåller värdet ∞ för de perioder då det lånas och värdet 1 för de perioder då det ej lånas, dvs. $I_{r_t} = \infty$ när $r_t = L$ och $I_{r_t} = 1$ när $r_t = S$.

Betrakta nu indexsekvensen $\mathbf{r} = [r_2, \ldots, r_m]$. Varje indicering r_t antar värdet L eller S beroende på om man lånar under den t:te perioden eller ej. Låt nu $\lambda_2(\mathbf{r})$ beteckna antalet L som förekommer i hela sekvensen av indices från r_2 till r_m. På samma sätt får $\lambda_3(\mathbf{r})$ beteckna antalet L bland alla komponenterna i sekvensen från r_3 till r_m och så vidare. Alltså betecknar $\lambda_t(\mathbf{r})$ det antal perioder, från och med den t:te till och med den m:te, under

vilka man står i skuld. Uppenbart måste det gälla att $\lambda_{t+1}(\mathbf{r}) = \lambda_t(\mathbf{r})$ eller $\lambda_{t+1}(\mathbf{r}) = \lambda_t(\mathbf{r}) - 1$, där λ_t är ett naturligt tal.

Med hjälp av dessa beteckningar kan vi skriva $X_{\mathbf{r}}^{t,m} = I_{r_t} \cdot \ldots \cdot I_{r_m} = I_L^{\lambda_t(\mathbf{r})}$, ty faktorerna $I_S = 1$ kan utelämnas. Således övergår kapitalvärdena till

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t+1,m} = \sum_{t=1}^{m} z_t I_L^{\lambda_{t+1}(\mathbf{r})} \tag{3-72}$$

Emellertid kan villkoren

$$\sum_{t=1}^{m} z_t I_L^{\lambda_{t+1}(\mathbf{r})} \leqslant 0 \quad \text{för} \quad \mathbf{r} \in M \tag{3-73}$$

förenklas ytterligare. Eftersom $I_L > 0$, kan bägge leden divideras med $I_L^{\lambda_2(\mathbf{r})}$ utan att olikhetstecknet behöver kastas om. Detta leder till

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{z_t}{I_L^{\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r})}} \leqslant 0 \quad \text{för} \quad \mathbf{r} \in M \tag{3-74}$$

Enligt vad som ovan sagts blir potensen $\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r}) \geqslant 0$ för $t = 1, \ldots m$. Närmare bestämt gäller att $\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r}) = 0$ för $t = 1$. Vidare kan vi säga, ifall $\theta(\mathbf{r})$ betecknar perioden närmast efter den senaste period under vilken man ej lånar enligt sekvensen $\mathbf{r}$, att $\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r}) = 0$ för $t < \theta(\mathbf{r})$ och att $\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r}) > 0$ för $t \geqslant \theta(\mathbf{r})$. När $I_L \to \infty$, får alla de termer i summan värdet 0, vilka i nämnaren innehåller positiva potenser av I_L, medan de övriga termerna, vilka ju i nämnaren har potensen 0 av I_L, erhåller täljarnas värden. Med andra ord övergår villkoren till

$$\sum_{t=1}^{\theta(\mathbf{r})\ 1} z_t \leqslant 0 \quad \text{för} \quad \mathbf{r} \in M \tag{3-75}$$

Slutligen är det ju uppenbart att vi kan partitionera mängden M av indexsekvenser $\mathbf{r}$ efter de tidigaste perioderna i de olika sekvenserna under vilka lån kommer i fråga. Därvid erhålles en delmängd av sekvenser som ej motsvarar lån under någon period, en annan delmängd där lån först sker under den andra perioden, och så vidare ända till den delmängd där lån ej förekommer under någon period. Denna klassificering av indexsekvenserna tömmer ut alla möjligheter. Det sagda betyder att mängden $\mathbf{r}$ fullständigt kan partitioneras i m olika delmängder sådana att $\theta(\mathbf{r}) = 2, \theta(\mathbf{r}) = 3, \ldots, \theta(\mathbf{r}) = m + 1$. Restriktionen $\sum_{t-1}^{\theta(\mathbf{r})-1} z_t \leqslant 0$ erhåller samma form för alla $\mathbf{r}$ i en viss delmängd, så att villkoren för transformationsvektorn $\mathbf{z}$ kan skrivas på följande sätt

$$\sum_{t-1}^{\tau} z_t \leqslant 0 \quad \text{för} \quad \tau = 1, 2, \ldots, m \tag{3-76}$$

Härav framgår att ifall lån alls ej kan upptas och depositioner endast kan ske i form av tesaurering måste transformationsvektorn vara sådan att de kumulerade värdena av dess komponenter är icke-negativa vid varje tidpunkt.

f) *Generalisering till det fall då räntesatserna varierar mellan olika perioder*

Ifall räntesatserna förväntas variera mellan de olika perioderna, är den enda skillnad i förhållande till härledningen under c) för fallet med i detta avseende konstanta in- och utlåningsräntor som erfordras den att vi indicerar de olika in- och utlåningsräntorna med numren på de perioder till vilka de hör. I stället för att som förut skriva $r_t = S$, L skriver vi $r_t = S_t$, L_t för $t = 2, \ldots, m$. Därefter gäller hela härledningen. Villkoren för transformationsvektorn $\mathbf{z}$ blir som förut

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t+1,\,m} \leqslant 0 \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{3-77}$$

där $X_{\mathbf{r}}^{t+1,\,m} = I_{r_{t+1}} \cdot \ldots \cdot I_{r_m}$. Som förut är indexsekvensen $\mathbf{r}$ en $(m-1)$: tupel av indiceringar, dvs. $\mathbf{r} = [r_2, \ldots, r_m]$. Mängden M av alla olika indexsekvenser är ävenledes den cartesianska produkten av de $(m-1)$ mängderna $\{S_2, L_2\}$, $\ldots, \{S_m, L_m\}$. Skillnaden i förhållande till den tidigare härledningen består i att de $(m-1)$ mängderna alla är olika. Tidigare var de alla lika med $\{S, L\}$. Observera även att kardinaltalet för M, eller antalet olika indexsekvenser, blir precis lika stort som förut, dvs. 2^{m-1}.

Införandet av räntesatser som varierar med tiden kommer således inte att fundamentalt förändra de fall vi hittills har gått igenom. Fortfarande gäller att kapitalvärdena kalkylerade på alla de olika sätten från en möjlig serie av betalningar $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]$ skall vara icke-positiva. Ej heller ändras restriktionernas antal. De är fortfarande 2^{m-1} när låne- och sparräntorna är olika, liksom det endast finns en restriktion då de sammanfaller för varje period. Grafiskt betyder restriktionerna att T avgränsas av en konvex hyperkon med spetsen i origio när låne- och sparräntorna är olika. Ifall de bägge räntesatserna sammanfaller i varje period utgöres gränsen för T av ett hyperplan. I det andra specialfallet, dvs. när tesaurering utgjorde den enda möjligheten att flytta över kontanter från en period till en annan, blir naturligtvis räntesatser som varierar över tiden aldrig aktuella.

g) *Generalisering till det fall då in- och utlåningsräntornas höjd beror av det lånade eller deponerade beloppet*

Den andra möjligheten till generalisering från fallet med konstant in- och utlåningsränta består i att dessa räntesatser får variera beroende på vilket

belopp som lånas in eller ut. Vi börjar med antagandet att det finns ett godtyckligt antal sparräkningar och ett godtyckligt antal låneräkningar med var sin räntesats och var sitt »tak» för storleken av det lånade eller deponerade beloppet.

Antag att de olika låneräkningarnas antal är h och sparräkningarnas antal är k. Bland de senare inräknas även kontant-tesaurering. De olika sparräkningarna numreras från 1 till k i ordning efter fallande räntesats, så att i_k är räntan på den ogynnsammaste sparräkningen. De olika låneräkningarna numreras från -1 till $-h$ efter växande räntesats, så att i_{-h} är räntan på den ogynnsammaste låneräkningen. När sålunda index r_t för perioden t genomlöper värdena $-h, \ldots, -1, 1, \ldots, k$ faller i_{r_t} successivt från $i_{-h} = \infty$, som utgör ett absolut hinder för ytterligare lån och till $i_k = 0$, som utgör tesaureringsräntan. Eftersom r_t för varje $t = 2, \ldots, m$ kan anta $(h+k)$ olika värden blir antalet olika index-sekvenser, som förut betecknade $\mathbf{r} = [r_2, \ldots, r_m]$, lika med $(h+k)^{m-1}$.

Index r_t identifierar den för perioden t ogynnsammaste bankräkning som kommer till utnyttjande. När det endast deponeras under t anges med $\varkappa_{r_t}$ det sammanlagda värdet av maximibeloppen för alla de bankräkningar som helt fyllts innan den ogynnsammaste bankräkningen kommit till användning. Samma sak anges i de fall då det endast lånas under t av $-\varkappa_{r_t}$, varvid alltså $\varkappa_{r_t}$ betecknar sammanlagda värdet med negativt förtecken av alla helt fyllda låneräkningar.

Med $i^*_{r_t}$ betecknas den genomsnittliga räntan på de helt fyllda bankräkningarna under perioden t, där genomsnittet beräknats genom att de olika bankräkningarnas räntesatser vägts med de relativa andelar som deras respektive maximivärden utgör av maximivärdenas summa. Med $i^*_{r_t}$ betecknas således den genomsnittliga räntan på alla fyllda bankräkningar, medan i_{r_t} betecknar räntan på den marginella bankräkningen. Mot dessa olika räntesatser svarar räntefaktorerna $I^*_{r_t} = (1 + i^*_{r_t})$ och $I_{r_t} = (1 + i_{r_t})$.

Nu gäller att varje värde k_{t-1}, som tillgodohavandet uppgår till vid slutet av den $(t-1)$:a perioden, under den t:te perioden kommer att ackumuleras så att det vid periodens slut uppgår till värdet $\varkappa_{r_t} \cdot I^*_{r_t} + (k_{t-1} - \varkappa_{r_t}) I_{r_t}$; eller omskrivet $\varkappa_{r_t}(I^*_{r_t} - I_{r_t}) + k_{t-1} \cdot I_{r_t}$. Om vi vill beräkna kapitalvärdet av betalningsserien $\mathbf{z} = [z_1, \ldots, z_m]$ vid den m:te periodens slut kan vi starta från uttrycken

$$k_t = \varkappa_{r_t}(I^*_{r_t} - I_{r_t}) + k_{t-1} \cdot I_{r_t} - z_t \tag{3-78}$$

och

$$k_1 = -z_1 \tag{3-78 a}$$

Dessa leder fram till kapitalvärdesuttrycket $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = -k_m$:

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t,m} - \sum_{t=1}^{m-1} \varkappa_{r_{t+1}} (I^*_{r_{t+1}} - I_{r_{t+1}}) X_{\mathbf{r}}^{t+2,m} \tag{3-79}$$

där som förut $X_{\mathbf{r}}^{t,m} = I_{r_t} \cdot \ldots \cdot I_{r_m}$. För varje indexsekvens $\mathbf{r}$ erhåller den högra termen i kapitalvärdesuttrycket ett konstant värde med avseende på variationer i $\mathbf{z}$. Därför kan vi skriva

$$A_{\mathbf{r}} = \sum_{t=1}^{m-1} \varkappa_{r_{t+1}} (I^*_{r_{t+1}} - I_{r_{t+1}}) X_{\mathbf{r}}^{t+2,m}$$

och kapitalvärdet blir

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t,m} - A_{\mathbf{r}} \tag{3-80}$$

Som synes skiljer sig dessa uttryck från motsvarande i fallet då det endast existerade en in- och en utlåningsränta med den konstanta termen $A_{\mathbf{r}}$. Ifall vi sätter $h = 1$ och $k = 1$ blir mycket riktigt för varje period den genomsnittliga räntan $i^*_{r_t}$ lika med den marginella räkningens ränta i_{r_t}, varvid $A_{\mathbf{r}}$ för samtliga $\mathbf{r}$ erhåller värdet 0.

Genom upprepad användning av beviset under c) kan det härledas att villkoren som transformationsvektorn $\mathbf{z}$ måste lyda ifall in- och utlåningsräkningarnas antal är godtyckligt återigen består av att kapitalvärdet $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z})$ skall vara icke-positivt enligt alla olika beräkningsmetoder motsvarande de olika indexsekvenserna $\mathbf{r}$ inom mängden M. På grund av sin längd utelämnas dock härledningen. Resultatet blir således villkoren $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) \leqslant 0$ för alla $\mathbf{r} \in M$ eller

$$\sum_{t=1}^{m} z_t X_{\mathbf{r}}^{t,m} \leqslant A_{\mathbf{r}} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{3-81}$$

Mängden M av olika indexsekvenser $\mathbf{r}$ är den cartesianska produkten av $(m-1)$ likadana mängder vardera utgörande $\{-h, \ldots, -1, 1, \ldots, k\}$. Produktmängden M har således kardinaltalet $(h+k)^{m-1}$. Med andra ord finns det $(h+k)^{m-1}$ olika sätt att beräkna kapitalvärdet från en given transformationsvektor $\mathbf{z}$. På vart och ett av dessa sätt att beräkna kapitalvärdet skall detta bli icke-positivt.

Ökas antalet olika räntesatser som gäller för varje period, växer antalet kapitalvärdesdefinitioner och därmed också antalet lineära restriktioner för vektorn $\mathbf{z}$. Varje restriktion kommer därvid att gälla i ett allt mindre inter-

vall. När räntesatsernas antal växer till oändligheten och maximibeloppet för varje räkning krymper ihop till noll, kommer de linearа restriktionerna att kunna ersättas av en enda kontinuerlig funktion med kontinuerliga derivator. Restriktionen som definierar mängden T av möjliga transformationsvektorer $\mathbf{z}$ kan då formuleras

$$f(z_1, z_2, ..., z_m) \leqslant 0 \tag{3-82}$$

Eftersom räntesatsen för en viss period troligen ej varierar beroende på huru mycket som lånas eller deponeras under andra perioder torde ovanstående restriktion utan förlust i generalitet kunna skrivas:

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + ... + f_m(z_m) \leqslant 0 \tag{3-83}$$

För funktionens derivator måste vissa villkor gälla. För att restriktionen skall avgränsa argumentens värden uppåt, fordras att dess första derivator är positiva, dvs. $f_1' > 0$, $f_2' > 0, ..., f_m' > 0$. Vidare gäller att inga räntesatser får vara negativa, dvs. $dz_2/dz_1 = -f_1'/f_2' \leqslant -1$, $dz_3/dz_2 = -f_2'/f_3' \leqslant -1$ etc., vilket implicerar $f_1' \geqslant f_2' \geqslant ... \geqslant f_m'$. Räntesatserna varierar kontinuerligt med det deponerade eller lånade beloppets storlek. Rimligtvis bör de växa när det deponerade beloppet avtar eller det lånade beloppet tilltar. Eftersom $dz_2\ dz_1$, dz_3/dz_2 etc. uttrycker räntefaktorerna med negativt förtecken under perioderna 2, 3 etc., bör d^2z_2/dz_1^2, d^2z_3/dz_2^2 etc. samtliga vara negativa. Sålunda måste följande villkor gälla

$$\frac{d^2z_2}{dz_1^2} = -\frac{1}{f_2'}\left(f_2'' + f_2''\left(\frac{f_1'}{f_2'}\right)^2\right) < 0$$

$$\frac{d^2z_3}{dz_2^2} = -\frac{1}{f_3'}\left(f_2'' + f_3''\left(\frac{f_2'}{f_3'}\right)^2\right) < 0$$

etc.

4. Villkor för objektiv preferensrelation mellan investeringar

a) *Val mellan två olika investeringsalternativ*

I det fallet, då investeraren hade tillgång till en låneräkning och en sparräkning, bestämdes mängden T av transformationsvektorer $\mathbf{z}$ genom villkoren

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) \leqslant 0 \tag{4-1}$$

för alla $\mathbf{r} \in M$

Med $\mathbf{r}$ betecknades en m-tupel av indices, sådan att varje index r_t antog värdet L eller S, beroende på om denne stod i skuld eller ej under den

t:te av de m perioderna. Mängden M bestod av alla olika m-tupler av indices. Dess kardinaltal var 2^{m-1}. Kardinaltalet angav hur många olika kapitalvärden vid tidpunkten m, $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z})$, som kunde beräknas från en given transformationsvektor $\mathbf{z}$. Definitionen för kapitalvärde löd

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{m} z_t \cdot \prod_{\tau}^{m} (1 + i_{r_\tau}) \tag{4-2}$$

Nu gäller att $\mathbf{c} = \mathbf{y} + \mathbf{x} + \mathbf{z}$. Ur detta uttryck kan man lösa $\mathbf{z} = \mathbf{c} - \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Av kapitalvärdesfunktionerna framgår att

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c} - \mathbf{y} - \mathbf{x}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) - K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) - K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \tag{4-3}$$

Dessa kapitalvärden får emellertid ej vara större än 0 för något $\mathbf{r} \in M$, varför villkoren

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) \leqslant K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \tag{4-4}$$

för alla $\mathbf{r} \in M$

erhålles. Dessa villkor definierar mängden S av möjliga konsumtionsvektorer. Alltså:

$$S = \{\mathbf{c} \in R^m \mid K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) \leqslant K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \text{ för alla } \mathbf{r} \in M\} \tag{4-5}$$

Av kapitalvärdesdefinitionerna framgår, då ju $(1 + i_{r_\tau}) > 0$, att samtliga kapitalvärden $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c})$ för $\mathbf{r} \in M$ växer när en med hänsyn till den partiella preferensrelationen, $>$, gynnsammare konsumtionsvektor, $\mathbf{c}$, insättes. Det framgår även att man kan hålla ökningarna i samtliga kapitalvärden inom godtyckligt valda gränser, hur snäva man än önskar, genom att göra den objektiva förbättringen av $\mathbf{c}$ tillräckligt liten. Härav följer, ifall $\mathbf{c}$ skulle vara sådan att den starka olikheten

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) < K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \tag{4-6}$$

gäller för samtliga $\mathbf{r} \in M$, att konsumtionsvektorer $\mathbf{c}$ kan väljas vilka är objektivt fördelaktigare. Denna objektiva förbättring kan fortgå ända tills

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \tag{4-7}$$

gäller för minst ett $\mathbf{r} \in M$. Ytterligare objektiva förbättringar är ej möjliga, ty dessa ökar ofelbart samtliga från konsumtionsvektorn kalkylerade kapitalvärden, alltså även det eller de kapitalvärden för vilka likheten redan är uppfylld.

Likaså gäller när en konsumtionsvektor ej hör till de möjliga inom mängden S, dvs. då

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) > K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \tag{4-8}$$

gäller för åtminstone ett $\mathbf{r} \in M$, att heller inga objektivt fördelaktigare konsumtionsvektorer hör till mängden S, ty vänstra ledet växer ju ytterligare när en objektivt fördelaktigare konsumtionsvektor väljes.

Vi kan dela upp S i två delmängder. Dessa definieras:

$$S_* = \{\mathbf{c} \in S \,|\, K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \text{ för åtminstone ett } \mathbf{r} \in M\} \tag{4-9}$$

och

$$Q = \{\mathbf{c} \in S \,|\, K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) < K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) \text{ för alla } \mathbf{r} \in M\} \tag{4-10}$$

Uppenbart är att $S_* \cup Q = S$ samt $S_* \cap Q = \phi$, där ϕ betecknar den tomma mängden. Därvid betecknar S_* randen och Q interiören av den slutna mängden S.

Av det föregående resonemanget framgår att det för varje konsumtionsvektor inom Q finns åtminstone en konsumtionsvektor inom S_* som är objektivt fördelaktigare. Vidare finns inom mängden S inga konsumtionsvektorer som är objektivt fördelaktigare än de inom S_*. Om således endast vilken som helst av konsumtionsvektorerna inom S kan väljas, men ej några därutöver, måste någon av vektorerna inom delmängden S_* väljas, och alltså ej någon inom återstoden Q. Det sagda är ett resultat som kan utnyttjas för att uppställa den objektiva perferensrelationen mellan två investeringar.

Enligt definitionen av objektiv preferensrelation mellan investeringar skall den första investeringen föredras när det för varje $\mathbf{c}^{(2)} \in S^{(2)}$ finns åtminstone ett $\mathbf{c}^{(1)} \in S^{(1)}$ sådant att $\mathbf{c}^{(1)} \succ \mathbf{c}^{(2)}$. Så är fallet om $S^{(2)} \subset Q^{(1)}$, ty därvid kan ju endast konsumtionsvektorer inom $S^{(1)}$ väljas, varvid den första investeringen lämnar valet fritt inom $Q^{(1)}$ eller $S_*^{(1)}$; den andra investeringen åter endast erbjuder konsumtionsvektorer inom $Q^{(1)}$. Eftersom därvid en konsumtionsvektor inom $S_*^{(1)}$ skall väljas, följer att den första investeringen objektivt skall föredras.

Det kan även visas att den första investeringen objektivt skall föredras endast om $S^{(2)} \subset Q^{(1)}$. Antag för beviset att $S^{(2)} \not\subset Q^{(1)}$. Det måste i så fall finnas konsumtionsvektorer inom $S^{(2)}$ vilka antingen hör till $S_*^{(1)}$ eller också alls ej hör till $S^{(1)}$. Emellertid har det ovan visats att inom $S^{(1)}$ inte finns några konsumtionsvektorer som föredras objektivt framför vektorer som antingen hör till $S_*^{(1)}$ eller alls ej hör till $S^{(1)}$. Men därvid kan villkoret för att investering (1) objektivt skall föredras ej vara uppfyllt. Slutsatsen blir att den första investeringen föredras objektivt endast när $S^{(2)} \subset Q^{(1)}$.

Därför gäller den objektiva preferensrelationen så att första investeringen skall föredras om och endast om $S^{(2)} \subset Q^{(1)}$. På samma sätt visas att den andra investeringen objektivt skall föredras om och endast om $S^{(1)} \subset Q^{(2)}$.

Betrakta nu definitionerna av S och Q ovan. Av dessa framgår att $S^{(2)}$ bestäms av villkoren

$$K_r(\mathbf{c}) \leqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(2)}) \quad \text{för alla} \quad r \in M \tag{4-11}$$

och $Q^{(1)}$ av villkoren

$$K_r(\mathbf{c}) < K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(1)}) \quad \text{för alla} \quad r \in M \tag{4-12}$$

Nu är $S^{(2)}$ en delmängd av $Q^{(1)}$ om och endast om vid varje $\mathbf{c}$ för vilken de förra villkoren är uppfyllda det impliceras att även de senare villkoren är uppfyllda. Så är emellertid fallet om och endast om högra leden i samtliga starka olikheter bland de senare villkoren är större än högra leden i motsvarande svaga olikheter bland de förra villkoren, dvs. om och endast om

$$K_r(\mathbf{x}^{(1)}) > K_r(\mathbf{x}^{(2)}) \quad \text{för alla} \quad r \in M \tag{4-13}$$

Det sagda uttrycker egentligen två olika satser. Giltigheten för den första av dessa, dvs. att $K_r(\mathbf{c}) \leqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(2)})$ för alla $r \in M$ implicerar $K_r(\mathbf{c}) < K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ för alla $r \in M$ under förutsättning att $K_r(\mathbf{x}^{(2)}) < K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ för alla $r \in M$, framgår omedelbart. Det måste emellertid även bevisas att $K_r(\mathbf{c}) \leqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(2)})$ för alla $r \in M$ implicerar $K_r(\mathbf{c}) < K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ för alla $r \in M$ *endast* under förutsättning att $K_r(\mathbf{x}^{(2)}) < K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ för alla $r \in M$. Den senare satsen gäller när man — så snart $K_r(\mathbf{x}^{(2)}) \geqslant K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ för åtminstone ett $r \in M$ — kan finna en vektor $\mathbf{c}$ sådan att den satisfierar villkoren $K_r(\mathbf{c}) \leqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(2)})$ för alla $r \in M$ och villkoren $K_r(\mathbf{c}) \geqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ för åtminstone ett $r \in M$. Väljer vi $\mathbf{c} = \mathbf{y} + \mathbf{x}^{(2)}$ kommer $K_r(\mathbf{c}) \leqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(2)})$ att gälla — som likheter — för alla $r \in M$ och $K_r(\mathbf{c}) \geqslant K_r(\mathbf{y}) + K_r(\mathbf{x}^{(1)})$ att gälla för de $r \in M$ för vilka $K_r(\mathbf{x}^{(2)}) \geqslant K_r(\mathbf{x}^{(1)})$. Därmed är även den senare satsen bevisad.

På samma sätt gäller att $S^{(1)} \subset Q^{(2)}$ om och endast om

$$K_r(\mathbf{x}^{(2)}) > K_r(\mathbf{x}^{(1)}) \quad \text{för alla} \quad r \in M \tag{4-14}$$

Således måste det första investeringsalternativet väljas enligt objektiv preferensrelation, oberoende av konsumtionsbeslutet, om, och endast om, kapitalvärdet av detta alternativ, beräknat på varje möjligt sätt, är större än kapitalvärdet av det andra alternativet beräknat på motsvarande sätt. Likaledes föredras det andra alternativet, om, och endast om, kapitalvärdet av detta, beräknat på varje möjligt sätt, är större än det på motsvarande sätt beräknade kapitalvärdet av det första alternativet. Därmed har vi preciserat villkoren för objektiva preferensrelationer mellan investeringar.[1]

[1] Det sagda gäller endast under förutsättning att mängden T av möjliga transformationsvektorer är densamma vilken av de jämförda investeringsalternativen som än väljs. Skulle låne- och placeringsbetingelserna bero av den valda investeringens karaktär kommer själva kapitalvärdesfunktionerna att bli olika för olika investeringar. Vill-

Regeln är att en investering skall föredras framför en annan, oberoende av beslutet om konsumtionens fördelning i tiden, ifall dess kapitalvärde är större beräknat på alla de möjliga sätten. I treperiodsfallet med en in- och en utlåningsräkning finns fyra olika sätt att beräkna kapitalvärden på. *Generellt gäller då det för varje period finns en in- och en utlåningsräkning, på vilka obegränsade belopp kan lånas respektive deponeras, att antalet olika kapitalvärdesdefinitioner är* 2^{m-1}, *där m är antalet perioder för vilka planeringen sker. Om sparräntan sammanfaller med låneräntan kan kapitalvärdet endast beräknas på ett sätt, och vi kommer då fram till att det traditionella kapitalvärdeskriteriet kan tillämpas.* Ifall antalet olika räntesatser som gäller under samma period i stället ökas, ökar även antalet olika sätt att beräkna kapitalvärden, men villkoren gäller fortfarande. Eftersom kvantitetsrestriktioner för lån kan omtolkas i oändligt höga låneräntor och tesaurering i en sparränta som är 0, gäller det sagda i princip även detta fall.

b) *Specialfall: lån är ej möjliga och depositioner måste ske i form av tesaurering.*

Ett specialfall, nämligen det då bara tesaurering av kontanter och inga lån förekommer, är av speciellt intresse. Även om den beslutande konsumtionsenheten endast skulle överväga valet mellan de två investeringarna som sådana, utan att komplettera den valda investeringen med banklån eller bankdepositioner, vore det inkorrekt att fordra en objektiv preferensordning mellan investeringarnas fixerade betalningsserier som sådana, ty tesaureringsmöjligheterna finns ju alltid.

Det generella villkoret för att investering (1) objektivt skall föredras lyder ju: $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(1)}) > K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(2)})$ för alla $\mathbf{r} \in M$. Insättes uttrycken för kapitalvärdena erhålles villkoren

---

koren måste då modifieras så att den första investeringen objektivt skall föredras om och endast om

$$K_{\mathbf{r}}^{(2)}(x^{(1)}) > K_{\mathbf{r}}^{(2)}(x^{(1)}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{4-13 a}$$

gäller samtidigt som man vid val av den första investeringen varken erhåller en lägre ränta för placerade medel eller måste betala en högre ränta för lånade medel. Den nya indiceringen på kapitalvärdesfunktionerna anger därvid att kapitalvärdet av den första investeringen skall vara högre vid varje möjligt beräkningssätt när beräkningarna sker med de för den andra investeringen relevanta räntesatserna.

På samma sätt gäller att den andra investeringen objektivt skall föredras om och endast om

$$K_{\mathbf{r}}^{(1)}(x^{(2)}) > K_{\mathbf{r}}^{(1)}(x^{(1)}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{4-14 a}$$

gäller samtidigt som man vid val av den andra investeringen varken erhåller en lägre ränta för sparade medel eller måste betala en högre ränta för lånade medel.

$$\sum_{t=1}^{m} x_t^{(1)} X_{\mathbf{r}}^{t+1,m} > \sum_{t=1}^{m} x_t^{(2)} X_{\mathbf{r}}^{t+1,m} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{4-15}$$

Ovan under c) har visats att dessa uttryck efter insättning av värdet $I_S = 1$ kan skrivas

$$\sum_{t=1}^{m} x_t^{(1)} I_L^{\lambda_{t+1}(\mathbf{r})} > \sum_{t=1}^{m} x_t^{(2)} I_L^{\lambda_{t+1}(\mathbf{r})} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{4-16}$$

där $\lambda_{t+1}(\mathbf{r})$ anger det antal av perioderna från den $(t+1)$:a till den m:te under vilka lån upptas enligt sekvensen $\mathbf{r} = [r_2, \ldots, r_m]$, dvs. det antal indices bland $r_{t+1}, \ldots, r_m$ som har värdet L. Ifall vi dividerar bägge leden i varje olikhet med potensen $\lambda_2(\mathbf{r})$ av I_L, vilket är ett positivt värde, behöver olikhetstecknen ej kastas om. Villkoren övergår till

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{x_t^{(1)}}{I_L^{\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r})}} > \sum_{t=1}^{m} \frac{x_t^{(2)}}{I_L^{\lambda_2(\mathbf{r}) - \lambda_{t+1}(\mathbf{r})}} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{4-17}$$

Såsom emellertid visats under e) övergår uttrycket ovan när $I_L \to \infty$ till

$$\sum_{t=1}^{\theta(\mathbf{r})-1} x_t^{(1)} > \sum_{t=1}^{\theta(\mathbf{r})-1} x_t^{(2)} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{4-18}$$

Därvid betecknar $\theta(\mathbf{r})$ numret på perioden närmast efter den senaste period under vilken man ej upptar lån enligt sekvensen $\mathbf{r}$. Såsom visats antar $\theta(\mathbf{r})$, när alla olika $\mathbf{r}$ inom mängden M betraktas, endast värdena $2, 3, \ldots, m+1$. Av det skälet kan villkoren skrivas

$$\sum_{t=1}^{\tau} x_t^{(1)} > \sum_{t=1}^{\tau} x_t^{(2)} \quad \text{för} \quad \tau = 1, 2, \ldots, m \tag{4-19}$$

För att alltså den första investeringen objektivt skall föredras framför den andra när lån ej kan upptas och depositioner endast kan ske i form av tesaurering fordras att de kumulerade summorna av den första investeringens nettointäkter fram till var och en av tidpunkterna $1, 2, \ldots, m$ är större än motsvarande kumulerade summor för den andra investeringen. På samma sätt föredras den andra investeringen objektivt framför den första när

$$\sum_{t=1}^{\tau} x_t^{(2)} > \sum_{t}^{\tau} x_t^{(1)} \quad \text{för} \quad \tau = 1, 2, \ldots, m \tag{4-20}$$

c) *Val mellan alternativen att genomföra eller avstå från en investering*

Det sagda har gällt valet mellan två alternativa investeringar, men villkoren är fullt tillämpliga även då det gäller att avgöra huruvida en viss investering hellre skall genomföras än icke genomföras. Även i detta fall kan

vi säga att valet avser två investeringar, nämligen dels den verkliga investeringen och dels den »investering» vars betalningsvektor endast har nollor till komponenter. Kapitalvärdet av den senare »investeringen» blir 0 hur vi än räknar det. *Således erhåller vi slutsatsen att en investering skall genomföras hellre än icke genomföras om dess kapitalvärde, räknat på varje möjligt sätt, är positivt. Likaså skall man hellre avstå från en investering än att genomföra den om dess kapitalvärde, räknat på varje möjligt sätt, är negativt. I dessa fall kan man fatta beslutet oberoende av konsumtionens fördelning över tiden, men i alla de övriga fallen måste hänsyn tas till den ifrågavarande konsumentens tidspreferens för konsumtionen. När låne- och sparräntorna sammanfaller, kommer vi fram till det vanliga kapitalvärdeskriteriet som säger att en investering skall väljas om dess, nu entydiga, kapitalvärde är positivt, annars icke.*

Vi har nu genomfört den ena av denna undersöknings uppgifter, nämligen att bestämma de förhållanden under vilka ett investeringsbeslut kan fattas oberoende av beslutet om konsumtionens fördelning i tiden. Som synes har diskussionen därvidlag lett fram till de vanliga kapitalvärdeskriterierna, och komplikationer har uppträtt när kapitalvärdet ej har kunnat definieras entydigt, beroende på att entydiga kalkylräntesatser för varje period ej har kunnat anges. Nu gäller det att se om det finns några enkla villkor för att interna eller effektiva räntans höjd skall ange den ordning i vilken investeringarna objektivt skall prefereras. De enda villkor vi kan finna är tillräckliga för att så skall vara fallet, men absolut ej nödvändiga. Vidare är de, som vi skall se, knappast sådana att de kan väntas vara uppfyllda i verkligheten.

Härledningen av dessa tillräckliga villkor är mycket enkel. Betrakta systemen av olikheter (4-13) och (4-14). Om det förra olikhetssystemet gäller skall den första investeringen föredras, medan den andra investeringen skall föredras om i stället det senare olikhetssystemet gäller. Interna eller effektiva räntan definieras nu som den räntesats, vilken gör kapitalvärdet av en investerings alla avkastningar och kostnader (även inköpskostnaden) precis lika med 0. Observera att detta gäller oberoende av den tidpunkt till vilken kapitalvärdet kalkyleras. Kalla effektiva räntorna för de bägge investeringarna respektive $i_*^{(1)}$ och $i_*^{(2)}$. Deras värden bestäms av villkoren

$$\sum_{t=1}^{m} x_t^{(1)}(1+i_*^{(1)})^{m-t} = 0 \tag{4-21}$$

och

$$\sum_{t=1}^{m} x_t^{(2)}(1+i_*^{(2)})^{m-t} = 0 \tag{4-22}$$

Om nu investeringarna är obligationer, eller andra investeringar envar med endast en inköpskostnad och i övrigt positiva nettointäkter, kommer deras kapitalvärden att falla när den ränta, till vilken kapitalvärdena beräknas, stiger. Detta gäller även om kapitalvärdena beräknas med olika räntesatser under olika perioder och endast en eller några av räntesatserna stiger. Härav följer att om kapitalvärdet av $\mathbf{x}^{(1)}$ kalkyleras med räntesatser som alla är högre än $i_*^{(1)}$, blir kapitalvärdet positivt. Likaså blir kapitalvärdet negativt om det kalkyleras till räntesatser som alla är mindre än $i_*^{(1)}$. Motsvarande gäller för $\mathbf{x}^{(2)}$. Om nu både sparräntan och låneräntan är högre än den första investeringens effektiva ränta, blir $K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(1)})$ negativt för alla $\mathbf{r} \in M$ och, enligt vad vi har sagt, skall den första investeringen helst inte väljas alls. Kapitalvärdena blir alla positiva, och den första investeringen skall hellre väljas än inte väljas, om i stället både sparräntan och låneräntan är lägre än denna investerings effektiva ränta. Motsvarande gäller för den andra investeringen. *Det sagda betyder att en investering hellre skall väljas än inte väljas om både sparräntan och låneräntan är lägre än investeringens effektiva ränta, och att en investering hellre inte skall väljas än väljas när både sparräntan och låneräntan är högre än dess effektiva ränta. För de övriga fallen kan ingenting sägas utan kännedom om preferenserna för konsumtionens fördelning över tiden.*

Härav följer nu att om både sparräntan och låneräntan ligger i intervallet mellan två jämförda obligationers effektiva räntor, skall obligationen med den högre effektivräntan väljas, och obligationen med den lägre effektivräntan inte väljas. *Med andra ord skall den investering av två, vilken har högsta effektiva ränta, väljas under förutsättning att sparräntan och låneräntan bägge har värden mellan de jämförda effektivräntornas.* Det sagda kan lätt generaliseras när räntesatserna för in- och utlåning varierar över tiden, eller varierar med de lånade eller deponerade beloppen, eller när man på grund av osäkerheten inte kan ange de förväntade räntesatserna annat än intervallsvis. I så fall skall samtliga tänkbara räntesatser för in- och utlåning under hela den tid planeringen avser ligga mellan de jämförda obligationernas effektivräntor. Detta blir lätt orimligt om man överväger in eller utlåning till så stora belopp att positiv ränta för ytterligare depositioner inte kan påräknas eller att kvantitativa restriktioner för lån inträffar. I så fall varierar de tänkbara räntesatserna inom hela intervallet från 0 till $+\infty$ Vidare gäller ju i regel, även bortsett från det sagda, att obligationernas effektiva räntor ligger samlade mellan bankernas in- och utlåningsräntor och ej tvärtom. Detta tyder på att det tillräckliga villkoret för att effektiva räntan skall vara objektivt preferenskriterium *ej* är uppfyllt i det fall då effektiva räntan används i verkligheten. Emellertid bör det betonas att

villkoret var tillräckligt och ej nödvändigt. Det erhölls såsom biprodukt till det fall då man objektivt kunde avgöra att den ena obligationen skulle väljas och den andra inte väljas. Det vore ju också bra egendomligt om det funnes sådana obligationer som det vore rationellt för alla att föredra, eller sådana där det inte vore rationellt för någon att köpa dem oberoende av preferenserna för konsumtionens fördelning i tiden.

Resultatet av det hela blir att vi knappast har funnit något som talar för att det i verkligheten skulle existera sådana spar- och lånemöjligheter som leder till objektiva preferensordningar på effektiva räntans grund. Metoden att beräkna kapitalvärdena på de olika möjliga sätten för de jämförda investeringarna kan leda till bättre resultat. Men kvar finns ändå en stor grupp fall där ingen objektiv preferensrelation emellan jämförda investeringar existerar. Emellertid kan vi även i dessa fall säga en del på grundval av den föregående diskussionen. Om man nämligen bestämmer sig för en investering och för en viss möjlig serie av bankinsättningar och uttag, kan man lätt bestämma ifall det tilltänkta beslutet är objektivt irrationellt, dvs. ifall den resulterande konsumtionsfördelningen i tiden bättre hade kunnat erhållas genom att välja en annan investering och en annan serie av bankinsättningar och uttag.

5. Villkor som måste gälla även då objektiv preferensordning ej föreligger

Väljer man den första investeringen har man möjlighet att uppnå alla konsumtionsvektorer $\mathfrak{c} \in S^{(1)}$, och väljer man den andra investeringen har man möjlighet att uppnå alla konsumtionsvektorer $\mathfrak{c} \in S^{(2)}$. Det första villkoret för att den konsumtionsvektor man väljer verkligen är rationellt vald, består i att $\mathfrak{c}$ skall höra till de maximala medlemmarna inom den mängd som svarar mot den valda investeringen. Om alltså den första investeringen väljs, måste $\mathfrak{c} \in S_*^{(1)}$ gälla, liksom $\mathfrak{c} \in S_*^{(2)}$ måste gälla, när man i stället väljer den andra investeringen. Ifall nu endera $S_*^{(2)} \subset Q^{(1)}$ eller $S_*^{(1)} \subset Q^{(2)}$ var för handen, kunde man avgöra att det var objektivt rationellt att välja den första respektive den andra investeringen oberoende av beslutet om konsumtionens fördelning i tiden. När inget av villkoren är uppfyllt, kan vi ej säga generellt vilken investering som skall väljas. Men så snart man har bestämt sig för en investering och tillika avgjort serien av bankinsättningar och uttag, varigenom konsumtionsvektorn blir bestämd, kan man objektivt säga ifall det hade varit rationellare att i stället välja den andra investeringen. Säg att man nu bestämt sig för att välja den första investeringen och att man fastställt en bestämd konsumtionsvektor $\mathfrak{c}^{(1)} \in S_*^{(1)}$. Skulle det gälla

att detta $\mathbf{c}^{(1)} \in Q^{(2)}$, kan man inom $S^{(2)}$ finna vektorer $\mathbf{c}^{(2)}$, sådana att $\mathbf{c}^{(2)} > \mathbf{c}^{(1)}$, och alltså sådana att de objektivt måste föredras framför $\mathbf{c}^{(1)}$. Alltså gäller att den första investeringen ej skall väljas om den därvid åstundade konsumtionsvektorn ingår i interiören av $S^{(1)}$.

Interiören av $S^{(1)}$ bestäms enligt (4-10) ovan av

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) < K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(1)}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{5-1}$$

och interiören av $S^{(2)}$ av

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}) < K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(2)}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{r} \in M \tag{5-2}$$

Den första investeringen skall alltså inte väljas om $\mathbf{c}^{(1)}$ är sådan att den satisfierar (5-2). Nu är $\mathbf{c}^{(1)}$ enligt definition lika med $\mathbf{y} + \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{z}^{(1)}$, där $\mathbf{z}^{(1)}$ står för en alldeles bestämd serie av bankinsättningar och uttag. Observera vidare att kapitalvärdesfunktionerna har sådana egenskaper att

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}^{(1)}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{z}^{(1)}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(1)}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}^{(1)})$$

Det sagda innebär att den första investeringen ej skall väljas om olikheterna

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}^{(1)}) < K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(2)}) - K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(1)}) \tag{5-3}$$

gäller för samtliga $\mathbf{r} \in M$. Till höger om olikhetstecknen står kapitalvärdet av »differensinvesteringen» $\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}$. *Det sagda innebär att kapitalvärdet av serien bankinsättningar och uttag ej får vara mindre än motsvarande kapitalvärde av differensinvesteringen* $\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}$ *beräknat på alla de möjliga sätten om den första investeringen skall väljas.* Motsvarande gäller den andra investeringen. För denna är

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}^{(2)}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{z}^{(2)}) = K_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(2)}) + K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}^{(2)})$$

Nu gäller att $\mathbf{c}^{(2)} \in Q^{(1)}$ ifall olikheterna (5-1) är uppfyllda vid $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(2)}$. Väljer man därför den andra investeringen i kombination med en serie bankbetalningar åskådliggjord med vektorn $\mathbf{z}^{(2)}$ får ej de följande olikheterna gälla för alla $\mathbf{r} \in M$:

$$K_{\mathbf{r}}(\mathbf{z}^{(2)}) < K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(1)}) - K_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{(2)}) \tag{5-4}$$

Vi kan även formellt uttrycka villkoret att $\mathbf{c}^{(1)} \in S_*^{(1)}$ måste gälla när $\mathbf{c}^{(1)} \in S^{(1)}$, liksom $\mathbf{c}^{(2)} \in S_*^{(2)}$ måste gälla när $\mathbf{c}^{(2)} \in S^{(2)}$, eller att konsumtionsvektorn måste höra till de maximala vektorerna i respektive mängder. Eftersom $S^{(1)}$ och $S^{(2)}$ delas upp mellan $S_*^{(1)}$ och $Q^{(1)}$ respektive mellan $S_*^{(2)}$ och $Q^{(2)}$, får ej konsumtionsvektorn höra till interiören av den mängd som svarar mot den valda investeringen. Om den första investeringen väljs får

$\mathbf{c}^{(1)}$ alltså ej satisfiera olikheterna (5-1). Insättes uttrycken för $K_r(\mathbf{c}^{(1)})$ finner vi efter omflyttning att

$$K_r(\mathbf{z}^{(1)}) < 0 \tag{5-5}$$

ej får gälla för samtliga $r \in M$. På motsvarande sätt gäller, då den andra investeringen väljs, att

$$K_r(\mathbf{z}^{(2)}) < 0 \tag{5-6}$$

ej får gälla för samtliga $r \in M$. Vi härledde förut den *möjliga* mängden av vektorer $\mathbf{z}$, betecknad T, vilken definierades genom att kapitalvärdena ej fick vara positiva vid *någon* av de möjliga definitionerna för kapitalvärde. Nu ser vi alltså att dessa kapitalvärden för en vektor ej heller får vara negativa vid samtliga definitioner, om valet skall vara rationellt.

Sammanfattningsvis gäller att, i de fall då objektiv preferensordning enligt ovan ej är aktuell mellan två investeringar, man inte kan avgöra vilken investering som skall väljas utan att ta hänsyn till beslutet om konsumtionens fördelning över tiden. Men så snart man valt en investering av två möjliga, och bestämt sig för en serie av möjliga bankinsättningar och uttag, kan man urskilja de beslut som är objektivt irrationella. Först gäller det att kapitalvärdet av bankbetalningsserien ej får vara negativt vid samtliga definitioner. Vidare gäller att, ifall kapitalvärdet av bankinsättningarna och uttagen, beräknat på alla de möjliga sätten, är mindre än motsvarande kapitalvärde av differensinvesteringen mellan det icke valda och det valda alternativet, då skulle det ha varit bättre att välja det uteslutna alternativet.

Det sagda har härletts för fallet med en in- och en utlåningsräkning, där räntesatserna är oförändrade från period till period och där det är möjligt att låna in och ut obegränsade belopp till de givna räntesatserna. Emellertid gäller detta, liksom de tidigare slutsatserna, i lika mån fallen där sparräntan och låneräntan varierar mellan perioderna eller påverkas av det deponerade respektive lånade beloppet. Skillnaden blir den att kapitalvärdesdefinitionernas antal ökar och därmed även antalet räkneoperationer som måste företagas.

6. Slutsatser

Avsikten med detta kapitel har varit att undersöka i vilka fall ett investeringsbeslut kan fattas oberoende av ett beslut om konsumtionens fördelning i tiden, och alltså på rent objektiva indikationer, oberoende av arten hos de subjektiva preferenser för konsumtionens tidsfördelning, vilka investeringen avses att tillfredsställa. Utgångspunkten är emellertid förutsättningen om att investeringar ej utgör mål i sig, utan endast är medel att

omfördela serien av under olika perioder konsumerade värden. Ifall de företagsledningar, som har att fatta investeringsbeslut i verkligheten, har att tillgodose intressena hos ett flertal aktieägare med olika preferenser, blir problemet mera komplicerat, men därmed är det inte givet att det existerar några räntabilitetskalkyler varigenom man på objektiva grunder kan avgöra huruvida ett visst investeringsprojekt, eller vilket av ett antal alternativa projekt, är lönande att genomföra.

Vår diskussion har hållits på ett generellt plan såtillvida som den har varit tillämplig såväl för finansiella placeringar som för reala investeringar, bara de har lytt villkoret att de skall leda till alldeles bestämda serier av intäkter och utgifter över tiden. Innebörden av detta, i och för sig orimliga försummande av osäkerheten är lättast att precisera för det fall som vi i föreliggande arbete mest intresserar oss för, nämligen det som gäller placeringar i obligationer. Därvid tänker man sig alltså att köpta obligationer är avsedda att behållas till inlösningsdatum, vilket tänks infalla vid en på förhand känd tidpunkt, utan någon konverteringsrisk. Det är ju inte något särskilt realistiskt fall, men vår avsikt är enbart att visa att man *inte ens* i detta kan betrakta de vanliga rekommenderade räntabilitetskriterierna som objektivt riktiga handlingsregler. Behandlingen av osäkerhetsproblemen uppskjuts till kapitlen VI och VII.[1]

Vi har under de angivna förutsättningarna jämfört två investerings- eller placeringsalternativ för att undersöka när endera av dem objektivt sett har varit att föredra. Därmed har vi även täckt problemet att avgöra när en viss investering objektivt skall anses lönande att genomföra, ty den ena av de jämförda »investeringarna» kan man låta representeras av den serie be-

---

[1] Det bör emellertid observeras att förutsättningen om full säkerhet inte betyder att köpta obligationer kan bli sålda när som helst under sina löptider till på förhand kända kurser. Förutsättningen kan alltså sägas ha varit, att det investerade subjektet sedan anskaffningsbeslutet skett icke har någon möjlighet att utbyta tillgången mot pengar eller andra tillgångar. Dylik utbytbarhet har alltså förutsatts endast för banktillgodohavanden eller bankskulder.

Det fall däremot då subjektet har tillgång till en dylik marknad med för varje framtida tidpunkt med full visshet förutsedda priser för de olika tillgångarna skall behandlas i kap. V. Under de där gällande förutsättningarna uppstår ju heller inte det nu aktuella problemet om flerdimensionella betalningsströmmars jämförbarhet, då man därvid för varje elementär placeringsperiod kan avgöra att en, eller flera, av de möjliga placeringsobjekten har den gynnsammaste utvecklingen av värdet, inklusive periodens eventuellt förfallna kuponger. Eftersom obligationerna kan säljas när som helst, kan dessa elementära placeringsperioder nämligen göras så korta, att det för varje obligation bara blir fråga om en betalning vid periodens början och en vid dess slut, den senare omfattande en eventuell kupong.

talningar av 0-belopp, som uppstår då man inte engagerar sig i någon investeringsverksamhet alls.

Det vi sökte var sådana objektiva preferensrelationer mellan investeringar som kunde sägas gälla utan hänsyn till de mera specifika egenskaperna hos enskilda subjekts preferensordningar. Alla tänkbara preferensordningar för tidsfördelningar av konsumtionsvärden skulle ha vissa drag gemensamma. Av två konsumtionsfördelningar, varav den ena innebar högre konsumtionsvärde under minst en period utan att innebära *lägre* konsumtionsvärde under någon annan period, måste en viss fördelning föredras oavsett preferensordningens karaktär i övrigt. Skulle nu valet av en investering möjliggöra konsumtionsfördelningar, bland vilka det för varje konsumtionsfördelning, möjliggjord genom valet av en annan investering, finns åtminstone någon fördelning som på detta sätt objektivt måste föredras, skulle naturligtvis den förra investeringen väljas. Detta var villkoret för att objektiv preferensrelation mellan två investeringar skulle råda, och för att investeringsbeslutet sålunda skulle kunna fattas oberoende av beslutet om konsumtionens fördelning i tiden. Denna preferensrelation är objektiv, såväl i den meningen att den gäller oförändrad för ett givet subjekt även om dettas preferenser skulle förändras, som i den meningen att den gäller på samma sätt för samtliga ekonomiska subjekt oberoende av olikheter i preferenser.

Vilka de möjliga konsumtionsfördelningarna, som svarade mot valet av respektive investeringar, skulle vara bestämdes av de övriga in- och utlåningsmöjligheterna. Vi kom till slutsatsen att objektiv preferensordning mellan två investeringar skulle föreligga om och endast om kapitalvärdet av den ena investeringen var högre vid varje möjligt beräkningssätt för kapitalvärdet, där varje beräkningssätt motsvarande varje särskild kombination av de olika räntesatser som gällde för in- och utlåning under olika perioder. Sålunda blir det kända kapitalvärdeskriteriet verkligen användbart. Men problemet som uppstår när det under varje period finns en rad olika räntesatser för olika stora alternativa penningplaceringar och olika stora lån, kan inte lösas genom att hela denna mängd olika räntesatser ersätts med en enda subjektiv kalkylräntesats. Det riktiga är i stället att kapitalvärdet av en investering ej blir entydigt bestämt. För att en investering objektivt skall vara att föredra, fordras att dess kapitalvärde är högre vid varje möjligt beräkningssätt. Helt naturligt uppstår nu en rad fall där villkoret inte gäller och där man objektivt inte alls kan tala om vilken av två investeringar som är att föredra. Investeringsbeslutet kan alltså inte fattas oberoende av konsumtionsbeslutet. Eller, annorlunda uttryckt, kan vi inte enbart med kännedom om den partiella objektiva preferensordningen av

konsumtionsfördelningar i tiden ange vilken investering som skall väljas, utan härför fordras kännedom om den fullständiga subjektiva preferensordningen.

Det enda som objektivt kan sägas i dylika fall gäller då ett visst investeringsbeslut uppträder tillsammans med ett bestämt beslut om konsumtionsfördelningen i tiden, och alltså tillsammans med ett bestämt beslut om serien av bankinsättningar och uttag. Därvid kan man ange när det hade varit objektivt riktigare att välja en annan investering. Den andra investeringen skall väljas i de fall då kapitalvärdet av serien bankinsättningar och uttag blir mindre än kapitalvärdet av differensinvesteringen mellan den andra investeringen och den som man hade tänkt välja från början. Detta villkor för kapitalvärdet skall återigen vara uppfyllt vid alla tänkbara kapitalvärdesdefinitioner.

Det förefaller alltså att investeringskalkyler som leder till objektiva resultat om de olika investeringarnas lönsamhet endast kan tillämpas i speciella fall. Vårt problem var även att undersöka i vad mån interna eller effektiva räntan kunde väntas vara kriterium för objektiv preferensordning mellan investeringar. Det villkor som fordrades för att så skulle vara fallet blev emellertid sådant att det knappast kunde tänkas vara uppfyllt i verkligheten. En investering av två alternativa skulle föredras när den hade högre effektiv ränta, om samtliga tänkbara räntesatser för in- och utlåning hade värden mellan de jämförda investeringarnas effektivräntor. Det sagda innebär att vi har funnit föga som talar för att investeringsbelut skall kunna träffas på rent objektiva indikationer och ännu mindre som talar för att dessa indikationer består i effektiva räntornas värden.

Emellertid bör det påpekas att vi därmed inte negativt har besvarat frågan om det finns något entydigt samband mellan innehavet av en obligation och dess effektiva ränta. För att utreda det problemet fordras en fullständig analys av ett portföljoptimum och dess beroende av obligationernas priser. En sådan analys skall genomföras i följande kapitel under liknande förutsättningar som de hittillsvarande.

Kapitel III

PORTFÖLJSAMMANSÄTTNING AV OBLIGATIONER SOM BEHÅLLS TILLS DE INLÖSAS

1. Problemställningen

I ett tidigare kapitel undersökte vi valsituationer, där det gällde att välja en bland ett antal möjliga investerings- eller placeringsalternativ. Vi försökte att uppställa villkor för att investeringsbesluten skulle kunna träffas enbart på grundval av den partiella preferensordning, som bestod av de för alla rationella preferensordningar gemensamma dragen vid värderingen av konsumtionsfördelningar i tiden. Så länge man kunde klara sig med denna partiella preferensordning skulle det verkligen existera objektivt givna investeringskalkyler med hjälp av vilka man skulle kunna avgöra valet av investering utan hänsyn till beslutet om konsumtionens fördelning i tiden. I regel kunde man emellertid, med hänsyn till att investeringarna avsåg att omfördela konsumtionen över tiden, inte objektivt avgöra vilken investering som vore att föredra. Valet mellan två investeringar motsvarade valet mellan två olika mängder av möjliga konsumtionsfördelningar över tiden, och endast om dessa mängder förhöll sig på ett specifikt sätt till varandra, kunde ett objektivt val av investering träffas. Vilken mängd av möjliga konsumtionsfördelningar som skulle motsvara en viss investering bestämdes av möjligheterna till sparande och lån. Dessa spar- och lånemöjligheter, vilka varierades på olika sätt, hade i samtliga fall karaktären av bankplaceringar och banklån.

Det är nu på tiden att vi låter de alternativa placeringsmöjligheterna bestå av andra investeringar. Vi måste med andra ord ta hänsyn till att de olika investeringsmöjligheterna ej är rent alternativa utan att de kan kombineras på olika sätt. I det fall vi i föreliggande arbete undersöker, gäller det alltså placering av en viss förmögenhet i en portfölj sammansatt av olika obligationer för att därigenom på effektivast möjliga sätt tillfredsställa önskemålen om konsumtionens fördelning i tiden.

Vi börjar med att förutsätta att inga andra transformationsmöjligheter existerar än de obligationer bland vilka portföljen skall sammansättas. Eftersom dessa förutsättningar är orimliga i den mån som alternativa bank-

placeringsmöjligheter och lånemöjligheter existerar skall vi sedan även införa de alternativa spar- och lånemöjligheter som tidigare preciserats. Åtminstone de sparmöjligheter som består i tesaurering av kontanter fordras för att göra förutsättningarna något så när rimliga.

Det bör observeras att förutsättningarna innebär att obligationerna ej säljas före inlösningsdatum. Fallet då obligationerna kan säljas när som helst till säkert anteciperade kurser behandlas i ett senare kapitel, liksom fallet då de framtida kurserna anteciperas under osäkerhet.

Vi skall i det följande undersöka valsituationer där ett ekonomiskt subjekt har att fördela en given initiell förmögenhet mellan obligationer av olika löptid för att därigenom erhålla en optimal fördelning av sin konsumtion i tiden. Problemet behandlas enligt den vanliga konsumtionsteorin för flera perioder enligt Fisher och Hicks, men vi låter inte placeringsmöjligheterna bestå av successiva enperiodsobligationer, utan i stället av alternativa obligationsplaceringar på olika lång tid. Eftersom varje obligation avkastar en hel serie av betalningar under olika tidpunkter uppstår vissa diskontinuiteter som fordrar speciell behandling.

Problemet är generellare än som framgår av det diskuterade fallet. Det uppstår alltid när de varor som köps på marknaden ej själva ingår i preferensfunktionen, utan denna istället som argument innehåller vissa mätbara egenskaper, vilka de olika varorna innehåller i fasta kombinationer. De variabler vilka ingår i preferensfunktionen kan ej varieras på samma sätt som när deras materiella motsvarigheter fritt kan inköpas på marknaden till givna priser.

Diskontinuiteterna betyder att restriktionen under vilken preferensindex skall maximeras ej är något hyperplan, utan en hyperpolygon med utstående hörn, vilka representerar fall då hela den disponibla summan används till att köpa de olika varorna var för sig, och ett antal olika hyperplan sammanbindande dessa, vilka representerar de fall då lika många olika varor som dimensionerna i preferensfunktionen köps.

2. Beteckningar

Beteckna antalet obligationer med n, och antalet olika tidpunkter, under vilka minst en av obligationerna ger någon betalning, med m. De olika obligationernas utlovade betalningsströmmar representeras av kolumner i nedanstående betalningsmatris, där för varje element vänstra fotindex anger tidpunkten för betalning och högra fotindex anger numret på obligationen.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Det ligger i sakens natur att ett av elementen i varje kolumn, nämligen för den tidpunkt vid vilken obligationen i fråga inlöses, har högt värde i jämförelse med de övriga. Elementen ovanför detta representerar kupongräntebetalningar och utgör i regel nedast några hundradelar av dess värde. Elementen under det största har samtliga värdet 0, eftersom obligationen i fråga ej ger någon avkastning sedan den inlösts.

Om det finns precis en obligation som inlöses vid var och en av de m tidpunkterna blir antalet kolumner lika stort som antalet rader, dvs. $n = m$. Vi kan då numrera obligationerna efter de tidpunkter vid vilka de inlösas, varigenom de stora elementen kommer i huvuddiagonalen. Elementen i huvuddiagonalen får samtliga värdet 1 om vi definierar varje obligationsenhet så att den har en kronas inlösningsvärde inklusive den sista kupongen, vilket vi kan göra utan någon generalitetsförlust. Under huvuddiagonalen har alla elementen värdet 0, och över den små positiva värden. När matrisen sålunda är kvadratisk kan vi beräkna dess determinant och dennas co-faktorer. I specialfallet blir värdet för determinanten och huvuddiagonalens co-faktorer 1. Värdet för co-faktorerna till elementen ovan huvuddiagonalen blir 0, medan co-faktorerna till elementen under denna får låga numeriska värden. Om obligationerna inte avkastar några kupongräntor, utan har samma karaktär som bankplaceringar på olika lång tid, får även co-faktorerna till elementen under huvuddiagonalen värdet 0.

Beteckna kvantiteterna av obligationer med $q_1, \dots q_n$. De sammanlagda avkastningarna från hela portföljen vid olika tidpunkter, betecknade $x_1, \dots, x_m$ blir då:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \\ x_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \end{cases} \tag{2-1}$$

Preferensfunktionen $U(x_1, \dots, x_m)$ är formulerad för dessa avkastningar. De kvantiteter av obligationerna som subjektet kan köpa anges av olikheterna $q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0, \dots, q_n \geqslant 0$ och likheten $F = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n$, där F är värdet av hans initiella förmögenhet och $p_1, p_2, \dots, p_n$ är obligationernas marknadspriser. Den initiella förmögenheten kan även skrivas $F = p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2 + \dots$

$+p_n\bar{q}_n$, där $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$ betecknar initiellt innehavda kvantiteter av obligationerna. När förmögenheten är optimalt sammansatt är dessa faktiskt innehavda kvantiteter lika med de optimala dvs. de kvantiteter $q_1, q_2, \ldots, q_n$ vilka uppfyller restriktionerna och ger maximalt värde på preferensindex U.

3. Antalet olika obligationer som kan ingå i en portfölj

Låt oss nu förutsätta att vi känner de optimala kvantiteterna för q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Följaktligen känner vi även värdena på $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$. Till preferensindexfunktionen kan vi i denna punkt bestämma ett tangentplan. Dess ekvation blir $U_1^0 x_1 + U_2^0 x_2 + \ldots + U_m^0 x_m = \text{konstant}$, där $U_1^0, U_2^0, \ldots, U_m^0$ betecknar de partiella derivatorna av preferensfunktionen med avseende på respektive variabler i optimalpunkten. Dessa partiella derivator eller »gränsnyttor» antas vara positiva. Det är nu uppenbart att om nyttofunktionen skall ha maximalt värde under de gällande restriktionerna, måste även den lineära funktionen $U_1^0 x_1 + U_2^0 x_2 + \ldots + U_m^0 x_m$, där de partiella derivatorna betraktas som konstanter, ha det. Genom substitution från ekvationssystemet (2-1) erhåller vi den lineära funktionen

$$(U_1^0 a_{11} + \ldots + U_m^0 a_{m1}) q_1 + \ldots + (U_1^0 a_{1n} + \ldots + U_m^0 a_{mn}) q_n \qquad (3\text{-}1)$$

vilken skall maximeras under bivillkoret $F = p_1 q_1 + \ldots + p_n q_n$ vid icke-negativa $q_1 \ldots, q_n$, Beteckna

$$\lambda = \text{Max}\left(\frac{a_{1i}}{p_i} U_1^0 + \ldots + \frac{a_{mi}}{p_i} U_m^0\right) \text{ över } i = 1, \ldots, n$$

Maximum under bivillkoren för den lineära funktionen (3-1) erhålles genom att subjektet endast köper de obligationer för vilka

$$\frac{a_{1i}}{p_i} U_1^0 + \ldots + \frac{a_{mi}}{p_i} U_m^0 = \lambda$$

Antag att dessa är n' till antalet. Vi erhåller då följande ekvationssystem.

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{p_1} U_1^0 + \dfrac{a_{21}}{p_1} U_2^0 + \ldots + \dfrac{a_{m1}}{p_1} U_m^0 = \lambda \\ \dfrac{a_{12}}{p_2} U_1^0 + \dfrac{a_{22}}{p_2} U_2^0 + \ldots + \dfrac{a_{m2}}{p_2} U_m^0 = \lambda \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \dfrac{a_{1n'}}{p_{n'}} U_1^0 + \dfrac{a_{2n'}}{p_{n'}} U_2^0 + \ldots + \dfrac{a_{mn'}}{p_{n'}} U_m^0 = \lambda \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

Av ekvationssystemet framgår att det omöjligt kan finnas värden på U_1^0, $U_2^0, \ldots, U_m^0$ vilka satisfierar ekvationssystemet (3-2) när alla ekvationerna är lineärt oberoende och $n' > m$. Lineärt beroende mellan ekvationerna innebär att somliga av obligationerna endast är portföljer sammansatta av några bland de övriga. *Det sagda betyder att det inte kan löna sig att köpa flera olika obligationer än antalet perioder i preferensfunktionen.* Däremot kan naturligtvis antalet olika obligationer vara mindre än antalet perioder.

4. Lika många obligationer köps som antalet perioder

Vi skall nu börja med att undersöka det fall då subjektet köper precis lika många olika obligationer som antalet perioder i preferensfunktionen. Vi låter också precis en obligation inlösas vid varje tidpunkt. Systemet (2-1) ovan blir då:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1m}q_m \\ x_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2m}q_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mm}q_m \end{cases} \tag{4-1}$$

Vi kan lösa ut $q_1, q_2, \ldots, q_m$ explicit ur ekvationssystemet (4-1). Om D betecknar systemets determinant blir

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{D_{11}}{D}x_1 + \dfrac{D_{21}}{D}x_2 + \ldots + \dfrac{D_{m1}}{D}x_m \\ q_2 = \dfrac{D_{12}}{D}x_1 + \dfrac{D_{22}}{D}x_2 + \ldots + \dfrac{D_{m2}}{D}x_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m = \dfrac{D_{1m}}{D}x_1 + \dfrac{D_{2m}}{D}x_2 + \ldots + \dfrac{D_{mm}}{D}x_m \end{cases} \tag{4-2}$$

Av ekvationssystemet (4-2) ser vi under specialfallet då precis en obligation inlöses vid slutet av varje period att

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{x_k = \text{konst.} \\ \text{vid } k \neq j}} = 1 \quad \text{för } i = j$$

medan derivatan blir 0 för $i < j$ och får numeriskt låga värden för $i > j$. Vi skall i fortsättningen för att kunna skriva mera kortfattat släppa angivelsen om vilka variabler som hållas konstanta och alltså skriva $\partial q_i / \partial x_j$

under den implicita förutsättningen att x_k för $k \neq j$ hålls konstanta. Observera att $\partial q_i/\partial x_j$ ej är inverterade värdet av $\partial x_j/\partial q_i = a_{ji}$ som erhålles ur ekvationssystemet (4-1) genom att q_h för $h \neq i$ är konstanta.

Ur ekvationssystemet (4-2) kan vi nu substituera i restriktionen $F = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_mq_m$. Denna budgetrestriktion övergår då till

$$F = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m \tag{4-3}$$

där

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{p_1D_{11} + p_2D_{12} + \ldots + p_mD_{1m}}{D} \\ b_2 = \dfrac{p_1D_{21} + p_2D_{22} + \ldots + p_mD_{2m}}{D} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m = \dfrac{p_1D_{m1} + p_2D_{m2} + \ldots + p_mD_{mm}}{D} \end{cases} \tag{4-4}$$

Observera att $b_j - p_1(\partial q_1/\partial x_j) + p_2(\partial q_2/\partial x_j) + \ldots + p_m(\partial q_m/\partial x_j)$ anger det värde som måste placeras sammanlagt i olika obligationer för att man, vid oförändrade x_k för $k \neq j$, skall kunna öka x_j med en krona. Således betecknar b_1, b_2, ..., b_m ett slags »imputed prices» för konsumerade värden under de m olika perioderna och $(b_j^{\,1/j} - 1)$ är räntesatser för j-periodiga lån.

Vi ser även att $\partial b_j/\partial p_i = \partial q_i/\partial x_j$, dvs. höjning av en obligations pris påverkar en periods »imputed price» lika starkt som en ökning av periodens konsumtion, vid oförändrad konsumtion under de övriga perioderna, påverkar innehavet av obligationen i fråga.

Uppenbart är att dessa »imputed prices» bör vara positiva. Vidare framgår av vårt tidigare införda specialfall att $\partial b_j/\partial p_i = \partial q_i/\partial x_j$ har värdet 1 när $i = j$, värdet 0 när $i < j$ och har numeriskt låga värden när $i > j$. Alltså kommer en prishöjning på en viss obligation att höja »imputed price» för den period då obligationen inlöses med samma belopp, att sänka »imputed prices» för perioderna före inlösningsdatum något och att lämna »imputed prices» efter inlösningsdatum opåverkade.

a) *Optimum*

Problemet kan nu formuleras som maximering av preferensfunktionen $U(x_1, \ldots, x_m)$ under det lineära bivillkoret att $F = b_1q_1 + \ldots + b_mq_m$. Villkoren för maximum består av dels ekvationssystemet

$$\begin{cases} U_1 - \lambda b_1 & = 0 \\ U_2 - \lambda b_2 & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_m - \lambda b_m & = 0 \\ F - b_1 q_1 - \ldots - b_m q_m = 0 & \end{cases} \tag{4-5}$$

och dels av att »principal minors» till determinanten G, definierad nedan, har alternerande tecken.

Dessa senare villkor implicerar att $G_{11}/G, G_{22}/G, \ldots, G_{mm}/G$ samtliga är negativa, varvid

$$G = \begin{vmatrix} U_{11} U_{12} & \ldots U_{1m} - b_1 \\ U_{21} U_{22} & \ldots U_{2m} - b_2 \\ \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ U_{m1} U_{m2} & \ldots U_{mm} - b_m \\ -b_1 - b_2 & \ldots -b_m \quad 0 \end{vmatrix} \tag{4-6}$$

Ur ekvationssystemet (4–5) bestående av $(m+1)$ ekvationer kan vi lösa ut värden på den optimala konsumtionsfördelningen i tiden $x_1, x_2, \ldots, x_m$ och på lagrangemultiplikatorn λ vilken i optimum anger gränsnyttan av ytterligare en kronas initiell förmögenhet använd för att öka vilken som helst av de m periodernas konsumtion.

b) *Vilka obligationer kan ingå i den optimala portföljen?*

Vi kan nu säga en del om *vilka* obligationer som kan tänkas ingå i en optimal portfölj, bestående av m olika obligationstyper. För att en uppsättning värden $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ som uppfyller villkoret $b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0 + \ldots + b_m x_m^0 = F$ skall ge maximalt värde på U, fordras att ingen annan möjlig värdekombination skall kunna ge ett högre värde på U. En möjlighet att variera värdena på $x_1, x_2, \ldots, x_m$ består i att kvantiteterna av de i portföljen ingående m olika obligationerna varieras, utan att någon ny obligation införes i portföljen. För att sådana variationer ej skall kunna öka värdet på U har vi just härlett villkoren.

Emellertid är det även möjligt att föra in obligationer som alls ej ingår i den optimala portföljen. Sådana åtgärder skall inte heller kunna öka värdet på U. Betrakta en sådan variationsmöjlighet. Vi placerar värdeandelen k av förmögenheten F i den v:te obligationen som ej ingår bland portföljens obligationer. Kvantiteten av denna obligation blir $q_v = k \cdot F/p_v$. Denna kvantitet leder till serien av portföljavkastningar

$$\begin{cases} a_{1v} \cdot q_v = a_{1v} \dfrac{F}{p_v} k \\ a_{2v} \cdot q_v = a_{2v} \dfrac{F}{p_v} k \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{mv} \cdot q_v = a_{mv} \dfrac{F}{p_v} k \end{cases} \tag{4-7}$$

Därigenom minskar värdet som kan placeras i portföljens m tidigare obligationer till $(1-k)F$. Låt nu denna minskning ta sig det uttrycket att kvantiteterna av de m obligationerna minskas proportionellt till $(1-k)$ av sina gamla värden.[1] Enligt systemet (4-1) ovan minskas då även de sammanlagda avkastningarna från dessa obligationer till $(1-k)$ av sina gamla värden, dvs. till

$$\begin{gathered} (1-k)x_1^0 \\ (1-k)x_2^0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (1-k)x_m^0 \end{gathered} \tag{4-8}$$

De sammanlagda portföljavkastningarna blir nu

$$\begin{cases} x_1 = (1-k)x_1^0 + a_{1v} \dfrac{F}{p_v} k \\ x_2 = (1-k)x_2^0 + a_{2v} \dfrac{F}{p_v} k \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m = (1-k)x_m^0 + a_{mv} \dfrac{F}{p_v} k \end{cases} \tag{4-9}$$

Skall portföljen av m obligationer vara optimal, kan det ej löna sig att föra in den v:te obligationen, dvs. öka k från värdet 0. Formellt uttryckt måste det gälla att

$$\frac{dU}{dk} = U_1^0 \frac{dx_1}{dk} + U_2^0 \frac{dx_2}{dk} + \ldots + U_m^0 \frac{dx_m}{dk} \leqslant 0 \tag{4-10}$$

[1] Denna förändring kan förefalla godtyckligt vald. Emellertid söker vi villkor som när de är uppfyllda implicerar att en viss portfölj, bestående av m olika obligationer och fördelad mellan dessa på ett enligt marginalvillkoren ovan optimalt sätt, ej kan vara den gynnsammaste. Därför är det tillräckligt att diskutera en godtyckligt vald förändring om den bara leder till det angivna resultatet.

där $U_1^0, U_2^0, \ldots, U_m^0$ är nyttofunktionens partiella derivator *i optimipunkten* och $dx_1/dk, dx_2/dk, \ldots, dx_m/dk$ är derivatorna för $x_1, x_2, \ldots, x_m$ med avseende på k i närmast föregående ekvationssystem. Dessa derivator är

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dk} = -x_1^0 + a_{1v}\dfrac{F}{p_v} \\ \dfrac{dx_2}{dk} = -x_2^0 + a_{2v}\dfrac{F}{p_v} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dx_m}{dk} = -x_m^0 + a_{mv}\dfrac{F}{p_v} \end{cases} \tag{4-11}$$

Vi vet också att $U_1^0 = \lambda b_1$, $U_2^0 = \lambda b_2$, ..., $U_m^0 = \lambda b_m$ enligt (4-5) ovan. Därför erhålles

$$\frac{dU}{dk} = -\lambda(b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0 + \ldots + b_m x_m^0) + \lambda(b_1 a_{1v} + b_2 a_{2v} + \ldots + b_m a_{mv})\frac{F}{p_v} \tag{4-12}$$

Nu är $b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0 + \ldots + b_m x_m^0 = F$, varför

$$\frac{dU}{dk} = -\lambda \cdot F\left(1 - \frac{b_1 a_{1v} + b_2 a_{2v} + \ldots + b_m a_{mv}}{p_v}\right) \tag{4-13}$$

Eftersom λ är gränsnyttan av en placerad krona, och sålunda positiv, samt då även förmögenheten F är positiv, blir $dU/dk \leqslant 0$ om och endast om

$$b_1 a_{1v} + b_2 a_{2v} + \ldots + b_m a_{mv} \leqslant p_v \tag{4-14}$$

Betrakta detta uttryck: $a_{1v}, a_{2v}, \ldots, a_{mv}$ är avkastningsserien från en enhet av den v:te obligationen. Symbolerna $b_1, b_2, \ldots, b_m$ betecknade »imputed prices» för portföljavkastningarna under de m perioderna. Dessa »imputed prices» är ett slags diskonteringsfaktorer för avkastningar som förfaller efter en period, två perioder etc. *För varje portfölj bestående av m olika obligationer kan vi beräkna diskonteringsfaktorer för avkastningar som förfaller under de m perioderna.* Uttrycket $b_1 a_{1v} + b_2 a_{2v} + \ldots + b_m a_{mv}$ betecknar således nuvärdet av den v:te obligationens framtida avkastningar beräknat med diskonteringsfaktorerna för portföljen av de m obligationerna. Portföljen kan inte vara optimal om nuvärdet av den v:te obligationens avkastningar är större än dess pris. Det sagda ger följande slutsats. En portfölj bestående av m olika obligationer kan vara optimal endast om nuvärdena, beräknade med denna portföljs diskonteringsfaktorer från de framtida avkastningarna, icke för någon av de övriga obligationerna är högre än dess pris.

c) *Förskjutningar av optimum*

Genom att differentiera systemet (4-5) kan vi undersöka hur de optimalt konsumerade värdena under olika perioder påverkas av förändringar i »imputed prices». Differentiering ger:

$$\begin{cases} U_{11}dx_1 + U_{12}dx_2 + \ldots + U_{1m}dx_m - b_1 d\lambda = \lambda db_1 \\ U_{21}dx_1 + U_{22}dx_2 + \ldots + U_{2m}dx_m - b_2 d\lambda = \lambda db_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{m1}dx_1 + U_{m2}dx_2 + \ldots + U_{mm}dx_m - b_m d\lambda = \lambda db_m \\ -b_1 dx_1 - b_2 dx_2 - \ldots - b_m dx_m \qquad\qquad = 0 \end{cases} \tag{4-15}$$

Den sista av ekvationerna tarvar en förklaring. Budgetrestriktionen i dess ursprungliga form kan även skrivas

$$p_1(q_1 - \bar{q}_1) + \ldots + p_m(q_m - \bar{q}_m) = 0 \tag{4-16}$$

Differentieras detta uttryck med avseende på variablerna $p_1, \ldots, p_m$ och $q_1, \ldots, q_m$, vilket innebär att de initiella obligationskvantiteterna $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_m$ hållas konstanta, erhåller vi, under förutsättning att $q_1 = \bar{q}_1, \ldots, q_m = \bar{q}_m$

$$p_1 dq_1 + \ldots + p_m dq_m = 0 \tag{4-17}$$

Den sista förutsättningen innebär helt enkelt att förmögenheten, då förändringen i obligationspriserna inträffar, är optimalt sammansatt. Av systemet (4-1) och av (4-4) framgår emellertid att

$$\begin{aligned} & b_1 dx_1 + \ldots + b_m dx_m \\ & = \frac{p_1 D_{11} + \ldots + p_m D_{1m}}{D}(a_{11}dq_1 + \ldots + a_{1m}dq_m) + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{p_1 D_{m1} + \ldots + p_m D_{mm}}{D}(a_{m1}dq_1 + \ldots + a_{mm}dq_m) \\ & = p_1\left(dq_1 \frac{a_{11}D_{11} + \ldots + a_{m1}D_{m1}}{D} + \ldots + dq_m \frac{a_{1m}D_{11} + \ldots + a_{mm}D_{m1}}{D}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + p_m\left(dq_1 \frac{a_{11}D_{1m} + \ldots + a_{m1}D_{mm}}{D} + \ldots + dq_m \frac{a_{1m}D_{1m} + \ldots + a_{mm}D_{mm}}{D}\right) \end{aligned} \tag{4-18}$$

Bråken i det sista ledet, m^2 till antalet, har täljare vilka utgör expansioner av determinanten D. Endast i de expansioner, vilka återfinnas i huvuddiagonalen, multipliceras elementen med sina egna co-faktorer och dessa ger alltså värdet D, medan i de andra expansionerna elementen multipliceras med co-faktorer från annan kolumn. Dessa senare expansioner ger värdet 0, varför resultatet blir att

$$b_1 dx_1 + \ldots + b_m dx_m = p_1 dq_1 + \ldots + p_m dq_m \tag{4-19}$$

vilket i sin tur betyder att V.L. liksom H.L. måste vara lika med 0. Men detta är precis vad som står i den sista ekvationen i systemet (4-15).

Löses ekvation (4-15) erhåller vi

$$\begin{cases} dx_1 = \lambda \dfrac{G_{11}}{G} db_1 + \lambda \dfrac{G_{21}}{G} db_2 + \ldots + \lambda \dfrac{G_{m1}}{G} db_m \\ dx_2 = \lambda \dfrac{G_{12}}{G} db_1 + \lambda \dfrac{G_{22}}{G} db_2 + \ldots + \lambda \dfrac{G_{m2}}{G} db_m \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ dx_m = \lambda \dfrac{G_{1m}}{G} db_1 + \lambda \dfrac{G_{2m}}{G} db_2 + \ldots + \lambda \dfrac{G_{mm}}{G} db_m \end{cases} \tag{4-20}$$

Eftersom andra ordningens villkor för maximum innebar negativitet för G_{11}/G, G_{22}/G, ..., G_{mm}/G och då λ var en positiv gränsnytta ser vi att

$$\left(\frac{dx_i}{db_i}\right) = \lambda \frac{G_{ii}}{G} < 0 \tag{4-21}$$

dvs. höjning av »imputed price» för konsumtionen under en viss period minskar konsumtionen under denna period. Hur konsumtionen för de andra perioderna påverkas kan ej sägas entydigt. Dock synes det vara ett a priori rimligt antagande att de konsumerade värdena för varje par av de m perioderna skall stå i substitutivt och ej i komplementärt förhållande till varandra[1]

[1] Man kan även visa att för ett enkelt specialfall konsumtionen under olika perioder måste stå i ett substitutivt förhållande. Antar vi nämligen att $U_{kl} = 0$ när $k \neq l$ och att $U_{kl} < 0$ när $k = l$ blir ekvationssystemets determinant

$$G = -\left(\prod_{k=1}^{m} U_{kk}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2 / U_{kk}\right)$$

Som synes blir $G < 0$ när m är ett udda tal och $G > 0$ när m är ett jämnt tal. Vidare erhålls de olika co-faktorerna

$$\left(\frac{dx_i}{db_j}\right) = \lambda \frac{G_{ji}}{G} > 0 \quad \text{för } i \neq j \tag{4-22}$$

Vi vill nu undersöka hur en höjning av det j:te obligationspriset påverkar efterfrågan efter den i:te obligationen. Höjning av ett obligationspris påverkar samtliga »imputed prices» $b_1, \ldots, b_m$ enligt (4-4). Vidare påverkas enligt (4-2) efterfrågan efter en obligation av förändringar i konsumtionen under samtliga perioder dvs. av förändringar i $x_1, \ldots, x_m$. Således blir

$$\begin{aligned}\left(\frac{dq_i}{dp_j}\right) = {} & \frac{\partial q_i}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{db_1}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial p_j} + \frac{dx_1}{db_2}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial p_j} + \ldots + \frac{dx_1}{db_m}\cdot\frac{\partial b_m}{\partial p_j}\right) \\ & + \frac{\partial q_i}{\partial x_2}\left(\frac{dx_2}{db_1}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial p_j} + \frac{dx_2}{db_2}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial p_j} + \ldots + \frac{dx_2}{db_m}\cdot\frac{\partial b_m}{\partial p_j}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\partial q_i}{\partial x_m}\left(\frac{dx_m}{db_1}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial p_j} + \frac{dx_m}{db_2}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial p_j} + \ldots + \frac{dx_m}{db_m}\cdot\frac{\partial b_m}{\partial p_j}\right)\end{aligned} \tag{4-23}$$

där de partiella derivatorna inom parenteserna erhållits ur (4-4) och de partiella derivatorna framför dessa erhållits ur (4-2).

Vi har tidigare sett att om obligationerna inte ger några kuponger utan endast ett inlösningsbelopp, så att de egentligen representerar olika långa bankplaceringar, blir $\partial q_i/\partial x_i = 1$ och $\partial b_j/\partial p_j = 1$ medan alla övriga partiella derivator i (4-23) blir lika med 0. I detta fall övergår (4-23) till

$$G_{ij} = \left(\prod_{k=1}^{m} U_{kk}\right) \cdot (b_i/U_{ii}) \cdot (b_j/U_{jj})$$

för $i, j = 1, \ldots, m$ och $i \neq j$. Därvid blir $G_{ji} < 0$ när m är ett udda tal och $G_{ji} > 0$ när m är ett jämnt tal. Av det sagda följer att G och G_{ji} alltid har samma tecken — oberoende av om m är udda eller jämnt — när $i \neq j$. För co-faktorerna till huvuddiagonalens element erhålls uttrycken

$$G_{ii} = -\left(\prod_{k=1}^{m} U_{kk}/U_{ii}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2/U_{kk} - b_i^2/U_{ii}\right)$$

varvid $i = 1, \ldots, m$. Tydligen blir $G_{ii} > 0$ när m är udda och $G_{ii} < 0$ när m är jämnt. Följaktligen har G och G_{ii} alltid motsatta tecken. Slutsatsen blir att $\lambda \cdot G_{ji}/G$ har positivt tecken för $i \neq j$ och negativt för $i = j$.

Förutsättningen att de partiella »kors»-derivatorna av andra ordningen har värdet noll är uppfylld om nyttofunktionen kan skrivas som $U(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} V_k(x_k)$. En nyttofunktion av denna typ innebär att den optimala fördelningen av ett *givet* värde mellan konsumtionen under en godtyckligt vald delmängd av de m perioderna vid givna räntesatser är oberoende av konsumtionen under de övriga perioderna.

$$\frac{dq_i}{dp_j} = \frac{dx_i}{db_j}$$

Detta innebär att efterfrågan efter den i:te obligationen påverkas av den j:te obligationens pris exakt på samma sätt som konsumtionen under den i:te perioden påverkas av »imputed price» för konsumtionen under den j:te perioden. Detta är egentligen självklart eftersom i detta speciella fall $q_i = x_i$ och $p_j = b_j$. Något liknande gäller emellertid som vi har sett approximativt även för kupongobligationer där kupongerna är små i jämförelse med inlösningsbeloppet och där en obligation förfaller under varje period. Det förefaller rimligt att efterfrågan efter den obligation, vilken inlöses under den i:te perioden, åtminstone påverkas i samma riktning från en höjning av priset på den obligation, vilken inlöses under den j:te perioden, som konsumtionen under den i:te perioden påverkas av ett höjt »imputed price» för den j:te periodens konsumtion. Det sagda gäller naturligtvis inte för annuitetsobligationer.

Ej heller gäller det sagda — vilket är allvarligare — om flera av obligationerna inlösas under samma period, medan inga obligationer alls inlösas under vissa perioder. Det kan synas att detta skulle vara orimligt, då man i så fall skulle välja en portfölj så att konsumtionen under vissa perioder är mycket hög, medan man under andra perioder ej kan konsumera något alls. Emellertid blir det hela mindre orimligt så snart man för in de mera realistiska förutsättningarna att andra medel att föra över konsumtionsvärde från period till period står till buds än valet av obligationer. I varje fall måste man räkna med tesaurering av kontanter, varför hela det belopp som förfaller till betalning under en viss period ej omedelbart behöver konsumeras.

5. Färre obligationer ingår i den optimala portföljen än antalet perioder

Vi skall härnäst undersöka hur diskussionen måste modifieras när antalet köpta obligationer är mindre än antalet perioder vilka ingår i preferensfunktionen. Detta kan bero på att det ej existerar tillräckligt många olika obligationer, eller på att subjektet ej finner det optimalt att köpa lika många obligationer som antalet perioder.

Beteckna i fortsättningen antalet *köpta* olika obligationer med n, där $n < m$. I systemet (2-1) ovan är antalet variabler alltså färre än antalet ekvationer, varför vi inte utan vidare kan lösa ut $q_1, \ldots, q_n$ explicit. Vi kan emellertid lägga till ett antal av de faktiskt existerande, icke köpta obliga-

tionerna för att få lika många variabler som ekvationer. Existerar inte tillräckligt många olika obligationer kan vi uppfinna fiktiva sådana, så att systemet blir lösbart. Detta är oss tillåtet under förutsättning att vi sätter de icke köpta obligationernas kvantiteter lika med 0. Antalet obligationer som måste läggas till betecknar vi med $r = m - n$. Ekvationssystemet ser nu återigen ut som (4-1) ovan. Detta kan som förut lösas och vi erhåller systemet (4-2). Nu måste vi emellertid sätta de $n - m$ sista av obligationskvantiteterna lika med 0. Systemet (4-2) blir då:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{D_{11}}{D} x_1 + \dfrac{D_{21}}{D} x_2 + \ldots + \dfrac{D_{m1}}{D} x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = \dfrac{D_{1n}}{D} x_1 + \dfrac{D_{2n}}{D} x_2 + \ldots + \dfrac{D_{mn}}{D} x_m \\ 0 = \dfrac{D_{1(n+1)}}{D} x_1 + \dfrac{D_{2(n+1)}}{D} x_2 + \ldots + \dfrac{D_{m(n+1)}}{D} x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \dfrac{D_{1m}}{D} x_1 + \dfrac{D_{2m}}{D} x_2 + \ldots + \dfrac{D_{mm}}{D} x_m \end{cases} \tag{5-1}$$

Insättes dessa värden i $F = p_1 q_1 + \ldots + p_m q_m$ erhåller vi

$$F = \frac{p_1 D_{11} + \ldots + p_n D_{1n}}{D} x_1 + \ldots + \frac{p_1 D_{m1} + \ldots + p_n D_{mn}}{D} x_m \tag{5-2}$$

Problemet gäller nu att maximera $U(x_1, \ldots, x_m)$ under det lineära bivillkoret (5-2) och under ytterligare $r = m - n$ lineära bivillkor, nämligen de $(m - n)$ sista ekvationerna i systemet (5-1).

Som förut kan vi beteckna konstanterna i (5-2) med $b_1, \ldots, b_m$, så att (5-2) övergår till

$$F = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m \tag{5-3}$$

Vi kan även införa nya beteckningar för att förenkla de r sista ekvationerna i (5-1) till

$$\begin{cases} 0 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1m} x_m \\ 0 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \ldots + c_{2m} x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \ldots + c_{rm} x_m \end{cases} \tag{5-4}$$

Således gäller det att maximera preferensindex under $(m-n+1)$ lineära bivillkor.

Det sagda betyder att $b_1, \ldots, b_m$ ej längre har unikt bestämda värden utan att vilka som helst $r=(m-n)$ av dem kan erhålla godtyckligt valda värden varvid de n återstående kommer att bero på dessa.[1]

a) *Villkor för optimum*

Optimalvillkoren av första ordningen lyder

$$\begin{cases} U_1 - \lambda b_1 + \beta_1 c_{11} + \ldots + \beta_r c_{r1} = 0 \\ U_2 - \lambda b_2 + \beta_1 c_{12} + \ldots + \beta_r c_{r2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_m - \lambda b_m + \beta_1 c_{1m} + \ldots + \beta_r c_{rm} = 0 \\ F - b_1 x_1 - b_2 x_2 - \ldots - b_m x_m = 0 \\ c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1m} x_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \ldots + c_{rm} x_m = 0 \end{cases} \tag{5-5}$$

---

[1] Detta kan man lätt se. Låt matrisen **A** vara definierad så som i början av detta kapitel. Definiera sedan radvektorerna $\mathbf{q}' = [q_1, \ldots, q_n]$, $\mathbf{p}' = [p_1, \ldots, p_n]$, $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_m]$ och $\mathbf{b}' = [b_1, \ldots, b_m]$. Motsvarande kolumnvektorer betecknas **q**, **p**, **x** och **b**. Enligt vedertagna regler för matrismultiplikation kan ekvationssystemet (3-1) ovan skrivas:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$$

Den lineära ekvationen $F = p_1 q_1 + \ldots + p_n q_n = b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m$ kan i den kompakta noteringen skrivas:

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}$$

Eftersom emellertid denna likhet skall gälla för alla vektorer **x** och **q** vilka uppfyller ekvationen $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$, kan vi säga att

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{q}$$

skall gälla för alla vektorer **q**. Detta är fallet om och endast om

$$\mathbf{p}' = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{A}$$

eller

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{b}$$

Utskrives ekvationssystemet, lyder det

$$p_1 = a_{11} b_1 + \ldots + a_{m1} b_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = a_{1n} b_1 + \ldots + a_{mn} b_m$$

Dessa $(m+1+r)$ ekvationer i lika många variabler, bestämmer värdena på $x_1, x_2, \ldots, x_m$ och på lagrangemultiplikatorerna $\lambda, \beta_1, \ldots, \beta_r$. Andra ordningens villkor för att de sålunda erhållna $x_1, x_2, \ldots, x_m$ skall vara optimala, innebär att »principal minors» till följande determinant skall alternera i tecken.

$$G = \begin{vmatrix} U_{11} & \ldots & U_{1m} & -b_1 & c_{11} & \ldots & c_{r1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{m1} & \ldots & U_{mm} & -b_m & c_{1m} & \ldots & c_{rm} \\ -b_1 & \ldots & -b_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{11} & \ldots & c_{1m} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \ldots & c_{rm} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \tag{5-6}$$

Andra ordningens villkor implicerar bl. a. att $G_{11}/G, G_{22}/G, \ldots, G_{mm}/G$ samtliga är negativa.

Låt oss nu summera de m första ekvationerna i systemet (5-5) multiplicerade med faktorerna $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, där dessa faktorer är de optimala portföljavkastningarna under perioderna $1, 2, \ldots, m$. Denna lineära kombination av de m ekvationernas vänstra led skall naturligtvis erhålla värdet 0. Flyttar vi så över alla termer som ej innehåller $U_1, U_2, \ldots, U_m$ i den kombinerade ekvationens högra led, erhålles

$$\begin{aligned} U_1 x_1^0 + U_2 x_2^0 + \ldots + U_m x_m^0 = {} & \lambda(b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0 + \ldots + b_m x_m^0) \\ & - \beta_1(c_{11} x_1^0 + c_{12} x_2^0 + \ldots + c_{1m} x_m^0) \\ & - \beta_2(c_{21} x_1^0 + c_{22} x_2^0 + \ldots + c_{2m} x_m^0) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \beta_r(c_{r1} x_1^0 + c_{r2} x_2^0 + \ldots + c_{rm} x_m^0) \end{aligned} \tag{5-7}$$

Vi har vid givna $p_1, \ldots, p_n$ erhållit n lineärt oberoende ekvationer i de m variablerna $b_1, \ldots, b_m$. När $n < m$ blir antalet ekvationer färre än antalet variabler och vi kan endast lösa ut n av variablerna som lineära funktioner av de $r = (m-n)$ återstående. Ekonomiskt betyder det erhållna ekvationssystemet att de m implicerade diskonteringsfaktorerna skall vara sådana att för var och en av de n obligationerna priset är precis lika högt som det med dessa diskonteringsfaktorer beräknade kapitalvärdet av obligationens avkastningar. När diskonteringsfaktorerna skall beräknas för fler perioder än antalet olika obligationer blir ej diskonteringsfaktorerna helt bestämda av dessa villkor.

Insättes därefter uttrycken från (5-3) och (5-4), erhåller vi:

$$U_1x_1^0 + U_2x_2^0 + \ldots + U_mx_m^0 = \lambda F \tag{5-8}$$

Nu representerar emellertid $U_1x_1^0 + U_2x_2^0 + \ldots + U_mx_m^0$ den totala gränsnyttan av en proportionell ökning av samtliga perioders portföljavkastningar. Eftersom vi har antagit att mättnad på konsumtion ej är uppnådd under någon period, dvs. att alla gränsnyttorna $U_1, U_2, \ldots, U_m$ är positiva, gäller detsamma naturligtvis även $U_1x_1^0 + U_2x_2^0 + \ldots + U_mx_m^0$. Med andra ord är $\lambda F > 0$, och eftersom förmögenheten $F > 0$, gäller även $\lambda > 0$.

Det kan även visas att $\lambda = dU/dF$, dvs. gränsnyttan av en förmögenhetsökning när förmögenheten ständigt är optimalt sammansatt. Differentiering av U ger

$$dU = U_1dx_1 + U_2dx_2 + \ldots + U_mdx_m \tag{5-9}$$

Insättes värdena på $U_1, U_2, \ldots, U_m$ från (5-5) erhålles

$$\begin{aligned} dU = {} & \lambda(b_1dx_1 + b_2dx_2 + \ldots + b_mdx_m) \\ & - \beta_1(c_{11}dx_1 + c_{12}dx_2 + \ldots + c_{1m}dx_m) \\ & - \beta_2(c_{21}dx_1 + c_{22}dx_2 + \ldots + c_{2m}dx_m) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - \beta_r(c_{r1}dx_1 + c_{r2}dx_2 + \ldots + c_{rm}dx_m) \end{aligned} \tag{5-10}$$

Innehållet i de r sista parenteserna utgöres av de differentierade högra leden från ekvationerna (5-4). För att dessa ekvationer skall vara uppfyllda måste differentialerna nollställas. Följaktligen gäller

$$dU = \lambda(b_1dx_1 + b_2dx_2 + \ldots + b_mdx_m) \tag{5-11}$$

Men nu är $dF = b_1dx_1 + b_2dx_2 + \ldots + b_mdx_m$ då endast förmögenheten förändras, men priserna är konstanta. Det betyder att $dU = \lambda dF$ eller just precis att $dU/dF = \lambda$. Denna gränsnytta skall naturligtvis i optimum sammanfalla med var och en av de m partiella gränsnyttorna av ytterligare en kronas förmögenhet använd för att öka en viss periods konsumtion. *Tolkningen av λ som gränsnyttan av ytterligare en kronas placerad förmögenhet står sig alltså fortfarande.*

b) *Förskjutningar av optimum*

Differentiering av ekvationssystemet (5-5) ger:

$$\begin{cases} U_{11}dx_1 + U_{12}dx_2 + \ldots + U_{1m}dx_m - b_1 d\lambda + c_{11}d\beta_1 - \ldots - c_{r1}d\beta_r = \lambda db_1 \\ U_{21}dx_1 + U_{22}dx_2 + \ldots + U_{2m}dx_m - b_2 d\lambda + c_{12}d\beta_1 - \ldots - c_{r2}d\beta_r = \lambda db_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{m1}dx_1 + U_{m2}dx_2 + \ldots + U_{mm}dx_m - b_m d\lambda + c_{1m}d\beta_1 - \ldots - c_{rm}d\beta_r = \lambda db_m \\ -b_1 dx_1 - b_2 dx_2 - \ldots - b_m dx_m = 0 \\ c_{11}dx_1 + c_{12}dx_2 + \ldots + c_{1m}dx_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}dx_1 + c_{r2}dx_2 + \ldots + c_{rm}dx_m = 0 \end{cases} \quad (5\text{-}12)$$

Lösningen till detta system blir liksom (4-20) ovan:

$$\begin{cases} dx_1 = \lambda \frac{G_{11}}{G} db_1 + \lambda \frac{G_{21}}{G} db_2 + \ldots + \lambda \frac{G_{m1}}{G} db_m \\ dx_2 = \lambda \frac{G_{12}}{G} db_1 + \lambda \frac{G_{22}}{G} db_2 + \ldots + \lambda \frac{G_{m2}}{G} db_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_m = \lambda \frac{G_{1m}}{G} db_1 + \lambda \frac{G_{2m}}{G} db_2 + \ldots + \lambda \frac{G_{mm}}{G} db_m \end{cases} \quad (5\text{-}13)$$

För denna gäller samma slutsatser som för det fall då vi hade $n = m$ ovan. Skillnaden blir att förändringar i priserna på de uteslutna obligationerna, dvs. $p_{n+1}, \ldots, p_m$, alls ej påverkar optimum, ty enligt (5-2) beror ej $b_1, b_2, \ldots, b_m$ på dessa priser. Vidare fortfar de uteslutna obligationerna att vara uteslutna. Det bör noteras att den använda metoden endast är tillämplig vid infinitesimala förändringar. När prisförändringarna är finita kan det tänkas att vissa obligationer i portföljen ersätts av andra och då är det även möjligt att förändringar i tidigare uteslutna obligationers priser kan förorsaka sådana obligationsbyten.

6. Bankplaceringar och lån kombineras med obligationsplacering

Vi skall nu även föra in möjligheterna att omfördela konsumtionen över tiden genom bankinsättningar och uttag. Fortfarande skall en förmögenhet, som är given i initiala mängder av olika obligationer, fördelas på ett optimalt sätt mellan dessa, för att därigenom få till stånd en konsumtionsfördelning

i tiden som på bästa sätt tillfredsställer de gällande preferenserna. Emellertid skall vi nu även ta hänsyn till att sparande i andra former och lån kan ifrågakomma.

Liksom tidigare antas att alla köpta obligationer *planeras* bli hållna tills de inlösas. Det sagda betyder emellertid *inte* att detta verkligen sker. Så snart obligationspriserna ändras, kommer även optimum att förändras. Vidare omprövas naturligtvis portföljsammansättningen på nytt för varje period.

Vi har som förut

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}q_1 + \ldots + a_{1n}q_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m = a_{m1}q_1 + \ldots + a_{mn}q_n \end{cases} \tag{6-1}$$

och

$$F = p_1q_1 + \ldots + p_nq_n \tag{6-2}$$

Nu söks emellertid maximum av

$$U(x_1 + z_1, \ldots, x_m + z_m) \tag{6-3}$$

där $z_1, \ldots, z_m$ representerar serien av bankinsättningar och uttag. Vi skall gå igenom problemet under några olika typer av villkor för $z_1 \ldots, z_m$.

a) *In- och utlåningsräntorna sammanfaller*

Det enklaste fallet uppstår då obegränsade belopp kan sparas och lånas till samma räntesats, betecknad i. Därvid gäller villkoret

$$z_1(1+i)^{-1} + \ldots + z_m(1+i)^{-m} = 0 \tag{6-4}$$

Man söker maximum för U under bivillkoren (6-1), (6-2) och (6-4).

Antag nu att vi känner de optimala värdena på $x_1, \ldots, x_m$ och $z_1, \ldots, z_m$. Ekvationen för tangentplanet till det indifferenslocus i R^m som motsvarar relativa nyttomaximum kan skrivas

$$U_1(x_1 + z_1) + \ldots + U_m(x_m + z_m) = \text{konstant} \tag{6-5}$$

där $U_1, \ldots, U_m$ är nyttofunktionens partiella derivator i optimipunkten. För att maximum under bivillkoren skall gälla för U, fordras att även $U_1(x_1 + z_1) + \ldots + U_m(x_m + z_m)$ skall ha ett maximalt värde under de gällande bivillkoren. Tangentplanet måste med andra ord ligga så långt ut från origio som möjligt.

Eftersom nu $x_1, \ldots, x_m$ är oberoende av $z_1, \ldots, z_m$ och vice versa fordras, för att $U_1(x_1 + z_1) + \ldots + U_m(x_m + z_m)$ skall vara maximal, maximum för $U_1x_1 + \ldots$

$+U_m x_m$ och $U_1 z_1 + \ldots + U_m z_m$ var för sig under respektive bivillkor. Maximum av $U_1 x_1 + \ldots + U_m x_m$ förutsätter liksom förut att villkoren

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{p_1} U_1 + \ldots + \dfrac{a_{m1}}{p_1} U_m = \lambda \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_{1n}}{p_n} U_1 + \ldots + \dfrac{a_{mn}}{p_n} U_m = \lambda \end{cases} \tag{6-6}$$

är uppfyllda, där $\lambda = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{Max}} \{(a_{1i}/p_i) U_1 + \ldots + (a_{mi}/p_i) U_m\}$ och n är antalet olika köpta obligationer. Som förut gäller att $n \leqslant m$, dvs. det lönar sig att köpa högst så många olika obligationer som antalet perioder.

Dessutom måste vi även ha maximum av $U_1 z_1 + \ldots + U_m z_m$ under bivillkoret $z_1(1+i)^{-1} + \ldots + z_m(1+i)^{-m} = 0$. Ur bivillkoret kan vi lösa ut $z_1 = -z_2(1+i)^{-1} - \ldots - z_m(1+i)^{-m+1}$. Substitution av z_1 i det uttryck som skall maximeras ger

$$(U_2 - U_1(1+i)^{-1}) z_2 + \ldots + (U_m - U_1(1+i)^{-m+1}) z_m \tag{6-7}$$

Vi söker ett maximum av (6-7). Därvid är vi fria att variera de återstående variablerna $z_2, \ldots, z_m$ hur vi än önskar, då vi redan har tagit hänsyn till det enda bivillkoret. För att vi skall erhålla definitiva optimalvärden på serien av bankinsättningar och uttag fordras att samtliga parenteser framför $z_2, \ldots, z_m$ i (6-7) är 0. I annat fall kan värdet på (6-7) ökas obegränsat genom att man låter någon av variablerna $z_1, \ldots, z_m$ närma sig $+\infty$ eller $-\infty$, något som naturligtvis vore orimligt. Genom att nollställa parenteserna erhåller vi de $m-1$ villkoren

$$U_1(1+i) = U_2(1+i)^2 = \ldots = U_m(1+i)^m \tag{6-8}$$

Dessa ekvationer ställer $m-1$ villkor på de partiella derivatorna $U_1, \ldots, U_m$. Detta betyder att högst ett ytterligare nytt villkor kan ställas på gränsnyttorna, men ej fler. Med andra ord kan högst en av ekvationerna i systemet (6-6) gälla, eller annorlunda uttryckt kan det löna sig att köpa högst ett slags obligationer. Detta gäller naturligtvis under förutsättning av lineärt oberoende. Förutsättningen om oberoende betyder, nu som förut, att ingen av obligationerna är en portfölj sammansatt av några bland de övriga. Vidare förutsättes nu att ingen av obligationerna är en transformation genom bankinsättningar och uttag av någon bland de andra obligationerna. Gäller inte detta betraktas ej längre alla obligationer såsom olika.

Det sagda överensstämmer väl med vår tidigare slutsats att vid obegränsade spar- och lånemöjligheter till samma räntesats den obligation skulle väljas vilken gav maximalt kapitalvärde. Flera obligationstyper kan tänkas bli likvärdiga om deras kapitalvärden är lika, vilket betyder att de är transformationer av varandra genom bankinsättningar och uttag enligt de möjligheter som skapas av den sammanfallande spar- och låneräntan. Av olika obligationer kan i det diskuterade fallet högst en typ väljas. Det kan naturligtvis även tänkas att ingen obligation köps, nämligen om samtliga obligationers kapitalvärden är negativa.

b) *Olika in- och utlåningsräntor*

Annorlunda blir det om spar- och låneräntorna är olika. I så fall ersätts ekvation (6-4) med ett system av lineära olikheter. Finns det under varje period en sparränta och en låneränta, till vilka man kan spara och låna obegränsade värden, då blir vid m perioder restriktionernas antal 2^{m-1}. Ifall det under varje period finns flera spar- och låneräntor, vilken som gäller beroende på hur mycket som sparas eller lånas, ökas antalet restriktioner. Likaså blir antalet restriktioner m när endast tesaurering av kontanter för sparande och inga lånemöjligheter står till buds. Alla dessa fall sammanfattas med följande system av M lineära restriktioner:

$$\begin{cases} A_{11}z_1 + \ldots + A_{1m}z_m \leqslant 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{M1}z_1 + \ldots + A_{Mm}z_m \leqslant 0 \end{cases} \tag{6-9}$$

Liksom förut kan vi, ifall vi känner de värden på $z_1, \ldots, z_m$ och $x_1, \ldots, x_m$ som maximerar $U(x_1+z_1, \ldots, x_m+z_m)$ under restriktionerna (6-1), (6-2) och (6-9), beräkna ett tangentplan till systemet av indifferensloci i optimipunkten. Tangentplanets ekvation kan skrivas $U_1(x_1+z_1)+\ldots+U_m(x_m+z_m)=$ konstant, där $U_1, \ldots, U_m$ är nyttofunktionens partiella derivator i optimipunkten. För att punkten verkligen skall vara optimal, fordras att $U_1(x_1+z_1)+\ldots+U_m(x_m+z_m)$ har maximalt värde i denna. Variablerna $x_1, \ldots, x_m$ är oberoende av $z_1, \ldots, z_m$, då ju villkoren som ställs på de förra är (6-1) och (6-2), medan de möjliga värdena på de senare variablerna bestäms av systemet (6-9), helt oberoende av (6-1) och (6-2). Följaktligen har uttrycket $U_1(x_1+z_1)+\ldots+U_m(x_m+z_m)$ maximum, om och endast om uttrycken $U_1x_1+\ldots+U_mx_m$ och $U_1z_1+\ldots+U_mz_m$ var för sig är maximala under respektive bivillkor. Observera att $U_1, \ldots, U_m$ i denna maximeringsprocess behandlas som konstanter.

Vi har redan sett att förutsättningen om maximalt $U_1x_1+...+U_mx_m$ ställer lika många restriktioner på $U_1,...,U_m$ som antalet olika köpta obligationer. Hur många villkor som ställs på gränsnyttorna för att $U_1z_1+...+U_mz_m$ skall vara maximal under bivillkor av systemet (6-9) beror på hur många av villkoren i (6-9) gäller som likheter. Om endast en av dem gäller som likhet blir resultatet precis detsamma som vid sammanfallande spar- och låneränta. Förutsättningen om maximum för $U_1z_1+...+U_mz_m$ ställer då $m-1$ villkor på gränsnyttorna, varför ytterligare högst ett villkor på dem kan gälla, dvs. högst en obligationstyp kan köpas.

Ifall två av restriktionerna (6-9) gäller som likheter, kan vi ur de bägge ekvationerna lösa ut två av z-variablerna som explicita funktioner av de övriga. De två utlösta variablerna kan substitueras i $U_1z_1+...+U_mz_m$, varefter detta uttryck endast innehåller $m-2$ oberoende variabler. För att uttrycket skall ha maximalt värde fordras att inga variationer av de $m-2$ oberoende variablerna skall kunna höja dess värde. Koefficienterna framför de oberoende variablerna måste därför ha värdet 0. Detta ställer $m-2$ villkor på gränsnyttorna, vilka ju ingår i de nollställda koefficienterna. Följaktligen kan ytterligare endast två restriktioner ställas på gränsnyttorna, dvs. högst två olika obligationer köpas.

Generellt gäller när s av de M villkoren i (6-9) är likheter, dvs.

$$\begin{cases} A_{11}z_1+...+A_{1m}z_m=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{s1}z_1+...+A_{sm}z_m=0 \end{cases} \tag{6-10}$$

att högst s olika obligationer kan köpas. Ty därvid ställs $m-s$ villkor på gränsnyttorna av (6-10), varför ytterligare högst s villkor kan ställas. Det högsta värde s kan ha är naturligtvis m. När $s=m$ kan bestämda värden på $z_1,...,z_m$ lösas ur ekvationssystemet (6-10), substitueras dessa i $U_1z_1+...+U_mz_m$ blir uttrycket ett trivialt maximum eftersom det är konstant. Några villkor på gränsnyttorna ställs ej, och följaktligen kan upp till m olika obligationer köpas, vilket liknar det första diskuterade fallet då inga andra möjligheter till sparande och lån fanns än de som obligationsportföljen medgav.

c) *Optimum*

Låt oss nu ställa upp villkoren för maximum. Förut undersökte vi maximum av

$$U(x_1,...,x_m) \tag{6-11}$$

under bivillkoren

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}q_1 + \ldots + a_{1n}q_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = a_{m1}q_1 + \ldots + a_{mn}q_n \end{cases} \tag{6-12}$$

och

$$F = p_1q_1 + \ldots + p_nq_n \tag{6-13}$$

Det högsta antalet olika köpta obligationer var m, dvs. $n \leqslant m$. Därvid kunde bivillkoren ersättas med

$$F - b_1x_1 - \ldots - b_mx_m = 0 \tag{6-14}$$

och

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1m}x_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}x_1 + \ldots + c_{rm}x_m = 0 \end{cases} \tag{6-15}$$

uttryckta i variablerna $x_1, \ldots, x_m$. Under dessa $r+1 = m-n+1$ bivillkor skulle U maximeras.

För det aktuella problemet gäller det att maximera

$$U(x_1 + z_1, \ldots, x_m + z_m) \tag{6-16}$$

under bivillkoren (6-14) och (6-15) samt därtill (6-10), dvs. under sammanlagt $r+s+1$ lineära bivillkor. Maximeringen sker enligt den vanliga lagrangemetoden. Därför införas lagrangemultiplikatorerna: λ för (6-14), $\beta_1, \ldots, \beta_r$ för de r restriktionerna i (6-15) och $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ för de s restriktionerna i (6-10).

Villkoren av första ordningen för optimum lyder

$$\begin{cases} U_1 - \lambda b_1 + \beta_1 c_{11} + \ldots + \beta_r c_{r1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_m - \lambda b_m + \beta_1 c_{1m} + \ldots + \beta_r c_{rm} = 0 \\ U_1 + \alpha_1 A_{11} + \ldots + \alpha_s A_{s1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_m + \alpha_1 A_{1m} + \ldots + \alpha_s A_{sm} = 0 \\ F - b_1x_1 - \ldots - b_mx_m = 0 \\ c_{11}x_1 + \ldots + c_{1m}x_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}x_1 + \ldots + c_{rm}x_m = 0 \\ A_{11}z_1 + \ldots + A_{1m}z_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{s1}z_1 + \ldots + A_{sm}z_m = 0 \end{cases} \tag{6-17}$$

Dessa $2m+r+s+1$ ekvationer bestämmer värdena på de lika många variablerna $x_1,\ldots,x_m$, $z_1,\ldots,z_m$, $\beta_1,\ldots,\beta_r$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ och λ. Andra ordningens villkor innebär att »principal minors» till determinanten

$$G=\begin{vmatrix}
U_{11} & \ldots & U_{1m} & U_{11} & \ldots & U_{1m} & -b_1 & c_{11} & \ldots & c_{r1} & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
U_{m1} & \ldots & U_{mm} & U_{m1} & \ldots & U_{mm} & -b_m & c_{1m} & \ldots & c_{rm} & 0 & \ldots & 0 \\
U_{11} & \ldots & U_{1m} & U_{11} & \ldots & U_{1m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{11} & \ldots & A_{s1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
U_{m1} & \ldots & U_{mm} & U_{m1} & \ldots & U_{mm} & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{1m} & \ldots & A_{sm} \\
-b_1 & \ldots & -b_m & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
c_{11} & \ldots & c_{1m} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{r1} & \ldots & c_{rm} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & 0 \\
0 & \ldots & 0 & A_{11} & \ldots & A_{1m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & A_{s1} & \ldots & A_{sm} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix} \qquad (6\text{-}18)$$

alternerar i tecken. Dessa implicerar bl. a. att G_{11}/G, G_{22}/G, ..., G_{mm}/G samtliga är negativa.

d) *Förskjutningar av optimum*

Om vi önskar veta hur förändringar av obligationsportföljens »imputed prices» för konsumtionen under de olika perioderna, dvs. $b_1,\ldots,b_m$ påverkar de optimala avkastningarna av obligationsportföljen under de olika perioderna, dvs. $x_1,\ldots,x_m$, kan vi differentiera systemet (6-17) på följande vis:

$$\begin{aligned}
&U_{11}dx_1+\ldots+U_{1m}dx_m+U_{11}dz_1+\ldots+U_{1m}dz_m-b_1d\lambda+c_{11}d\beta_1+\ldots+c_{r1}d\beta_r=\lambda db_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&U_{m1}dx_1+\ldots+U_{mm}dx_m+U_{m1}dz_1+\ldots+U_{mm}dz_m-b_md\lambda+c_{1m}d\beta_1+\ldots+c_{rm}d\beta_r=\lambda db_m\\
&U_{11}dx_1+\ldots+U_{1m}dx_m+U_{11}dz_1+\ldots+U_{1m}dz_m\qquad\qquad+A_{11}d\alpha_1+\ldots+A_{s1}d\alpha_s=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(6\text{-}19)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} U_{m1}dx_1 + \ldots + U_{mm}dx_m + U_{m1}dz_1 + \ldots + U_{mm}dz_m \qquad + A_{1m}d\chi_1 + \ldots + A_{sm}d\chi_s = 0 \\ -b_1dx_1 - \ldots - b_mdx_m = 0 \\ c_{11}dx_1 + \ldots + c_{1m}dx_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{r1}dx_1 + \ldots + c_{rm}dx_m = 0 \\ \qquad A_{11}dz_1 + \ldots + A_{1m}dz_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad A_{s1}dz_1 + \ldots + A_{sm}dz_m = 0 \end{cases}$$

Lösningarna till systemet lyder:

$$\frac{dx_i}{db_j} = \lambda \cdot \frac{G_{ji}}{G} \tag{6-20}$$

Av andra ordningens villkor för optimum följer att dx_i/db_i har motsatt tecken mot λ då $i = j$. Eftersom λ är gränsnyttan av ytterligare en placerad krona, och sålunda är positiv, följer att den optimala portföljavkastningen under en viss period minskar när obligationsportföljens »imputed price» för samma period stiger. Liksom förut är det rimligt att a priori anta de olika periodernas portföljavkastningar vara substitutiva, dvs. att

$$\frac{dx_i}{db_j} > 0 \text{ för } i \neq j. \tag{6-21}$$

Hur detta samband mellan portföljavkastning en viss period och någon periods »imputed price» översätts i ett samband mellan efterfrågan efter en viss obligation och dess marknadspris framgår av vår tidigare diskussion. Av den följer att det ej är säkert att det finns något entydigt samband mellan obligationsefterfrågan och marknadspris. Chansen för att ett entydigt samband finns är större i ju högre grad portföljens olika obligationer ger stora betalningar under *olika* perioder och ju mindre deras övriga betalningar är. Vidare gäller naturligtvis att, för det fall den i hela kapitlet gjorda förutsättningen om förmögenhetens optimala sammansättning ej skulle vara uppfylld, resultaten skulle kompliceras ytterligare genom uppträdande inkomsteffekter.

7. Sammanfattning

I föregående kapitel undersökte vi situationer där det gällde att välja mellan alternativa investeringar eller placeringsformer. Diskussionen i detta kapitel däremot avsåg fall där det var möjligt att kombinera flera olika

placeringsformer. Målet var att vid given förmögenhet sammansätta en portfölj av olika obligationer, avsedda att behållas till sina respektive inlösningsdata, på ett sådant sätt att den kombinerade portföljens avkastningssekvens så väl som möjligt tillfredsställer ett givet system av preferenser för konsumtionens fördelning i tiden.[1] Den vanliga metoden att bestämma en optimal kombination av nyttighetskvantiteter som kan inköpas till kända marknadspriser är därvid ej tillämplig, beroende på att i det aktuella fallet de varor som kan inköpas på marknaden ej direkt ingår i nyttofunktionen, utan innehåller de i denna ingående nyttigheterna i olika fixa kombinationer. Diskussionen har därför förts med en kombination av tankegångar från vanlig marginalanalys och linear programmering.

Diskussionen startade därvid under antagandet att några möjligheter för banklån och bankplaceringar vid sidan av obligationsplaceringarna ej existerade. För detta fall kunde den slutsatsen erhållas att det aldrig skulle löna sig med portföljer sammansatta av fler olika obligationstyper än antalet argument i nyttofunktionen. Obligationerna betraktades därvid som olika ifall ingen obligationstyp kunde uppfattas som en portfölj sammansatt av de övriga obligationstyperna.

En särskild implikation av det förda resonemanget kan vara värd att understrykas, nämligen att det faktiskt kan löna sig med sammansatta portföljer. Man har ju annars uppfattat omöjligheten av sammansatta portföljer vid frånvaron av risk som ett av skälen till att osäkerhetsfaktorerna borde tas i beaktande.

Ehuru det inte kunde löna sig att köpa fler olika obligationer än antalet argument i nyttofunktionen, kunde det väl tänkas att färre olika obligationer skulle ingå i den optimala portföljen. På grund av enkelheten i fallet började emellertid diskussionen med det något orealistiska antagandet att precis så många olika obligationer som nyttofunktionens argument skulle ingå i den optimala portföljen. Därvid kunde man för varje sådan portfölj beräkna ett slags »imputed prices» för argumenten i nyttofunktionen eller konsumtionsvärdena under olika perioder. Dessa »imputed prices» var ett slags implicerade diskonteringsfaktorer som angav de uppoffringar som måste göras omedelbart för att partiellt kunna öka konsumtionen med en värdeenhet under var och en av de olika perioderna. Med hjälp av dessa diskonteringsfaktorer kunde man beräkna nuvärden av olika betalningsserier. Dessa diskonteringsfaktorer hade sådana egenskaper att nuvärdena av avkastningssekvenserna för var och en av de i portföljen ingående

[1] Att köpta obligationer sålunda avses bli behållna tills de inlösas behöver emellertid inte medföra att portföljsammansättningen ej kan komma att ändras ifall obligationspriserna eller preferenssystemet skulle förändras.

variablerna skulle bli lika stora som deras respektive priser. För att en viss portfölj skulle vara optimal fordrades det att ingen av de uteslutna obligationerna skulle ha ett kapitalvärde beräknat från dess egna avkastningar med hjälp av portföljens »implicerade» diskonteringsfaktorer som var större än dess eget pris.

Eftersom man sålunda kunde beräkna »implicerade» priser eller »skugg»-priser för nyttofunktionens argument, kunde problemet diskuteras på vanligt sätt genom maximering av en nyttofunktion under ett lineärt bivillkor. Sedan optimum bestämts differentierades villkoren för en undersökning av hur olika perioders konsumtion skulle påverkas av förändringar i deras skuggpriser. Det visade sig därvid att höjning av skuggpriset för konsumtionen under en viss period alltid måste inskränka den periodens konsumtion. Denna slutsats kunde härledas med hjälp av andraordningsvillkor för optimum. Vidare kunde man a priori vänta sig att de övriga periodernas konsumtion skulle tendera att öka, något som sammanhängde med att de olika periodernas konsumtion antogs stå i substitutivt förhållande till varandra. De entydiga slutsatserna beror på att substitutionseffekten var den enda effekten av förändringen i skuggpriset när förmögenheten var optimalt sammansatt före ändringen. Motsvarigheter till inkomsteffekterna vilka i den vanliga konsumtionsteorien stör slutsatsernas entydighet blir sålunda aldrig aktuella i det här diskuterade fallet.

Emellertid är vi inte mycket hjälpta med de entydiga resultaten för hur olika perioders konsumtion påverkas av förändringar i skuggpriserna. Det som är av intresse, är hur efterfrågan efter obligationer påverkas av de verkliga obligationspriserna. En förändring i ett obligationspris påverkar emellertid samtliga skuggpriser och förändringen i efterfrågan efter en obligation beror på samtliga förändringar i de olika periodernas konsumtion som man önskar vidtaga. Här finns i allmänhet för många obekanta faktorer för att vi skall kunna ange någon entydig effekt på efterfrågan efter en viss obligation från förändringar i ett visst obligationspris.

Under de speciella antagandena att det i portföljen finns precis en obligationstyp som inlöses under var och en av de perioder vilkas konsumtion ingår som argument i nyttofunktionen, och att kupongerna är så små i jämförelse med inlösningsvärdena att de kan försummas, kan entydiga slutsatser erhållas. Därvid kommer »imputed price» att nämnvärt förändras endast för den period under vilken den obligation inlöses vars pris har förändrats. Vidare kommer efterfrågan efter en viss obligation att nämnvärt påverkas endast av konsumtionen under den period då obligationen inlöses. Man kan därför säga att efterfrågan efter en viss obligation påverkas av förändringar i ett visst obligationspris på samma sätt, som konsumtionen

under den period då den förstnämnda obligationen inlöses påverkas av förändringar i skuggpriset för konsumtionen under den period då den sistnämnda obligationen inlöses. Då skulle alltså efterfrågan efter en obligation avta när dess eget pris stiger och tillta när en annan obligations pris stiger. Denna slutsats kan emellertid endast dras för det speciella fallet.

Slutsatserna, vilka gäller när lika många olika obligationer köps som antalet argument i nyttofunktionen, kunde sedan lätt utsträckas till det fallet då färre obligationer skulle ingå i den otimala portföljen. Därvid kunde man inte utan vidare beräkna entydiga »imputed prices» för de olika periodernas konsumtion. Tekniskt kunde problemet lösas liksom förut genom att så många, i verkligheten icke köpta, »dummy»-obligationer infördes, som erfordrades för att det totala obligationsantalet skulle bli lika stort som antalet perioder i nyttofunktionen. Genom detta arrangemang kunde bestämda värden på skuggpriserna erhållas och problemet gällde återigen maximering av nyttofunktionen under bivillkor. Bivillkoren blev emellertid flera eftersom kvantiteterna av de i verkligheten icke köpta »dummy»-obligationerna måste nollställas. Resultaten för hur obligationsefterfrågan skulle påverkas av förändringar i obligationspriserna blev desamma som förut, ehuru de matematiska villkoren fick en mera komplicerad karaktär.

Detsamma kan sägas om fallet då möjligheter för banklån och bankplaceringar fördes in jämsides med obligationsplaceringarna. Det kunde bli lönande att förändra antalet olika obligationer i portföljen, men slutsatserna av den komperativt statiska diskussionen blev desamma som förut.

8. Appendix: Objektiva preferensrelationer mellan å ena sidan en obligationsportfölj och å den andra ur den uteslutna obligationer

Den tidigare diskussionen rörande objektiva preferensrelationer mellan investeringar har avsett sådana fall där investeringarna varit rent alternativa och endast har kunnat kombineras med in- och utlåning i bank. Det gäller nu att även diskutera de objektiva preferensrelationer som kan uppstå mellan en obligation och en portfölj sammansatt av flera andra obligationstyper. Dessa relationer är i huvudsak följande.

1) Det finns någon portfölj — sammansatt av de i denna ingående obligationerna — vilken är objektivt fördelaktigare än den ur portföljen uteslutna obligationen.

2) Det finns icke någon sådan portfölj vilken är objektivt fördelaktigare än den ur portföljen uteslutna obligationen.

3) Det finns någon portfölj — sammansatt av de i denna ingående obligationerna i jämförelse med vilken den ur portföljen uteslutna obligationen är objektivt fördelaktigare.

4) Det finns ingen sådan portfölj i jämförelse med vilken den ur portföljen uteslutna obligationen är objektivt fördelaktigare.

De föreskrifter man erhåller för sitt beteende i de fyra fallen med avseende på den uteslutna obligationen är följande:

1) Den uteslutna obligationen får ej inkluderas i portföljen.
2) Den uteslutna obligationen kan inkluderas i portföljen.
3) Den uteslutna obligationen måste inkluderas i portföljen.
4) Den uteslutna obligationen behöver ej inkluderas i portföljen.

I de fyra fallen måste vissa villkor — dem vi nu skall härleda — vara uppfyllda. Beteckna som förut den j:te obligationens avkastning under den i:te perioden med a_{ij}. Obligationerna i portföljen numreras $1,...,n$, medan den uteslutna obligationen ges nummer v. Perioderna numreras som förut $1,...,m$. Vi har redan sett att det ej kan löna sig att kombinera portföljer av flera olika obligationer än antalet perioder. Sålunda är $m \geqslant n$. Avkastningarna under m perioder som erhålles när hela förmögenheten F består av den j:te obligationen enbart betecknas $a_{ij}\, F/p_j = \bar{a}_{ij}$ för $i = 1,...,m$, där p_j som förut betecknar obligationspriset. Låter vi $\alpha_j = p_j q_j / F$ beteckna den relativa förmögenhetsandel som placeras i den j:te obligationen, kommer avkastningsserien för de m perioderna av en hel, godtyckligt sammansatt obligationsportfölj att kunna skrivas

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{n} (\bar{a}_{ij} \cdot p_j/F) \cdot (\alpha_j \cdot F/p_j) = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j \quad \text{för } i = 1, \ldots, m.$$

Enligt samma beteckningssätt blir avkastningsserien när hela förmögenheten placeras i den v:te obligationen $\bar{a}_{iv}$ för $i = 1, \ldots, m$. Budgetrestriktionen slutligen kan skrivas $F = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot F$ eller $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Med dessa beteckningar kan villkoren för de fyra objektiva preferensrelationerna härledas.

1) Det gäller att finna $\alpha_j \geqslant 0$ för $j = 1, \ldots, n$ där $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ sådana att $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j \geqslant \bar{a}_{iv}$ för alla $i = 1, \ldots, m$ och $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j > \bar{a}_{iv}$ för åtminstone ett $i = 1, \ldots, m$. Ifall det existerar sådana värden finns det en portfölj — kombinerad av de n obligationerna — vilken är objektivt fördelaktigare än den v:te obligationen. Dessa villkor kan uppställas som restriktionerna i ett problem för linear programmering,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j \geqslant \bar{a}_{iv} & i = 1, \ldots, m \\ \alpha_j \geqslant 0 & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

samt

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j > \bar{a}_{iv} \text{ för åtminstone ett } i = 1, \ldots, m.$$

En lösning med värden på α_j som uppfyller alla dessa restriktioner brukar kallas för en »feasible solution». Ett mycket viktigt teorem i linear programmering säger att det för varje »feasible solution» finnes åtminstone en »basic feasible solution» sådan att precis lika många av restriktionerna gäller som ekvationer som det finns variabler.[1]

Sålunda behöver vi endast undersöka ett ändligt antal »basic feasible solutions». Den första av de $(m+n+1)$ klamrade restriktionerna är redan uttryckt som ekvation. Det finns följaktligen $\binom{m+n}{n}$ olika sätt att bland de $(m+n)$ återstående restriktionerna utvälja $(n-1)$ ytterligare som skall ges karaktären av ekvationer. Alla sådana ekvationssystem måste nu lösas ifall det är möjligt. Därefter kontrolleras om någon av de sålunda erhållna lösningarna för $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfierar alla restriktioner. Dvs. för varje lösning kontrollerar man *att* de förmögenhetsandelar α_j som ej har nollställts från början har icke-negativa värden, *att* ingen av de avkastningar för portföljen — som ej från början har satts lika med avkastningen från den v:te obligationen — är mindre än den sistnämnda obligationens motsvarande avkastning, samt *att* åtminstone en av portföljens avkastningar är större än motsvarande avkastning för den v:te obligationen. Om någon lösning har denna karaktär kommer villkoren för det första fallet att vara uppfyllda och den uteslutna obligationen får ej inkluderas i portföljen.

2) Ifall villkoren under 1) ej är uppfyllda erhålles självfallet den motsatta slutsatsen att den uteslutna obligationen kan inkluderas i portföljen.

3) Det finns någon portfölj sammansatt av de n i denna inkluderade obligationerna i jämförelse med vilken den j:te obligationen är objektivt fördelaktigare under förutsättning att det finns $\alpha_j \geqslant 0$ för $j = 1, \ldots, n$ där $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ sådana att $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j \leqslant \bar{a}_{iv}$ för alla $i = 1, \ldots, m$ och $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j < a_{iv}$ för åtminstone ett $i = 1, \ldots, m$. Således gäller det att finna $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sådana att

[1] Se R. Dorfman – P. A. Samuelson – R. M. Solow, »Linear Programming and Economic Analysis», New York 1958, s. 75.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j \leqslant \bar{a}_{iv} & i = 1, \ldots, m \\ \alpha_j \geqslant 0 & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

samt $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \cdot \alpha_j < \bar{a}_{iv}$ för åtminstone ett $i = 1, \ldots, m$

Återigen kan man nu lösa alla de ekvationssystem som under 1). Ifall någon av lösningarna satisfierar samtliga restriktioner ovan är det uppenbart att det måste löna sig att införa den v:te obligationen i portföljen.

4) Om villkoren under 3) ej är uppfyllda behöver den v:te obligationen ej införas i portföljen.

När en obligationsportfölj jämförs med en ur denna utesluten obligation gäller det således att lösa $\binom{m-n}{n+1}$ olika lineära ekvationssystem. Om någon av de existerande unika lösningarna till dessa system satisfierar villkoren under 1) får den uteslutna obligationen ej införas; medan den skall införas om någon av dessa lösningar satisfierar villkoren under 3). Ifall varken villkoren under 1) eller under 3) satisfieras för någon lösning kan obligationen införas i portföljen, men man behöver ej göra det. I detta fall kan således inga föreskrifter ges på objektiv grund. Uppenbart är att restriktionerna under 1) och under 3) är motstridiga så att man ej på samma gång kan få motsägande objektiva föreskrifter att i portföljen införa och utesluta en viss obligation.

Kapitel IV

DEFINITION OCH BERÄKNING AV INTERN (EFFEKTIV) RÄNTA

1. Definition

Vi skall i föreliggande kapitel dröja vid rent tekniska problem i samband med definition och beräkning av effektiv ränta på obligationer. En del av den följande diskussionen är tillämplig även för andra investeringar med mera oregelbundna avkastningsfördelningar i tiden än de kupongobligationer vilka främst intresserar oss i detta arbete. Därför skall vi stundom i stället tala om det med effektiv ränta tekniskt synonyma begreppet intern ränta. Det senare används generellt för alla typer av investeringar, medan det förra i allmänhet förbehålles obligationer. För att diskussionen ej onödigtvis skall bindas vid obligationer, skall vi börja med att studera ett investeringsprojekt som leder till den icke närmare specificerade betalningsserien $a_0, a_1, \ldots, a_m$. För enkelhets skull har vi antagit att de olika komponenterna i betalningsserien kan hänföras till tidpunkter skilda av exakt lika långa tidsperioder. Den första betalningen a_0 antas motsvara inköpskostnaden för anläggningen eller värdepapperet i fråga och torde alltså vara negativ. De övriga komponenterna består av förväntade avkastningar och eventuellt inlösnings- eller skrotvärde då obligationen inlöses eller investeringsprocessen upphör, varför de torde vara övervägande positiva. Närmare skall vi till en början ej binda betalningsseriens form.

Vi kan nu ge en verbal definition av interna eller effektiva räntan. På ett tomt bankkonto, som vid behov även tillåter kredit till den räntesats som gäller för tillgodohavanden, tänkes ett belopp motsvarande köpesumman för värdepapperet eller anläggningen insatt i samma ögonblick som inköpet sker. Det innestående beloppet eller den eventuella skulden förräntas med ränta på ränta varvid räntesatsen blir oförändrad under investeringens hela livstid. En serie av uttag och eventuella insättningar göres, till belopp och tidsfördelning identisk med serien av avkastningar och eventuella ytterligare kostnader som investeringsprojektet leder till. Effektiva eller interna räntan är då lika hög som den bankränta vid vilken kontot precis tömmes med den aktuella betalningsserien, så att varken skuld eller tillgodohavande

återstår sedan den sista betalningen gjorts. Alternativt kan effektiva eller interna räntan definieras som den diskonteringsränta vilken gör kapitalvärdet av den förväntade betalningsserien i inköpsögonblicket precis lika stort som inköpskostnaden för investeringsprojektet. Denna definition är den vanliga och kan därför synas vara enklare. Men vår definition har den fördelen att den exakt anger den typ av frågeställning som effektiva räntan besvarar.

För att den verbala definitionen skall kunna leda till ett bestämt värde på interna räntan av en given investering, fordras att vi anger de tidpunkter vid vilka räntan kapitaliseras på den hypotetiska bankräkningen. I annat fall har vi ju inte tillräckligt preciserat vad som menas med att tillgodohavandet eller skulden skall förräntas med ränta på ränta. Olika numeriska värden på bankräntan uppfyller vid olika lång kapitaliseringsperiod villkoret att den tänkta bankräkningen skall tömmas av den givna betalningsserien. De vanligaste formlerna för effektiv ränta synes förutsätta att kapitaliseringen sker vid de tidpunkter då betalningarna för investeringsprojektet inträffar. Emellertid bör det observeras att tidpunkterna för in- och utbetalningar på bankräkningen i och för sig ingenting har att göra med tidpunkterna för räntans kapitalisering. Tvärtom synes det vara intuitivt rimligt att låta kapitaliseringsperioden överensstämma med de faktiska förhållandena i bankerna och alltså låta den vara gemensam vid beräkning av intern ränta på olika investeringar med olika långa intervall mellan betalningarna. Skulle man låta kapitaliseringen ske vid olika tidpunkter för olika investeringar, ger analogin med bankräkningar vid handen att man jämför räntesatsernas höjd för räkningar där räntan läggs till kapitalet med olika långa intervall. Sådana räntesatser kan ju ej utan vidare vara jämförbara då man har att välja någon av bankräkningarna. Att fortsätta med denna argumentation skulle emellertid återigen leda oss till det komplicerade problemet om interna räntans egenskap av räntabilitetskriterium, något som vi ju har behandlat i ett tidigare kapitel. Här är vi endast intresserade av de tekniska egenskaperna hos internräntebegreppet. Den föregående diskussionen har emellertid varit nödvändig för att visa att kapitaliseringen ej behöver ske samtidigt med att investeringens betalningar förfaller.

2. Entydighet

Vi skall nu fortsätta diskussionen med bortseende från det närmast innan behandlade problemet — för att senare — i samband med att obligationerna mera speciellt upptas till behandling — återkomma till problemet. Helt godtyckligt antas tills vidare att även kapitaliseringen inträffar vid

tidpunkterna $0, 1, ..., m$. Därigenom kan vi ange en speciell formel för sambandet mellan interna räntan och betalningsserien $a_0, a_1, ..., a_m$. Beteckna interna räntan med i och dess motsvarande räntefaktor med $I = (1 + i)$. Denna ränta skall gälla för både skulder och tillgodohavanden samt vara oförändrad under de m perioderna. Om värdet $-a_0$ insätts på bankkontot vid tidpunkten 0, uppgår tillgodohavandet omedelbart före tidpunkten 1, betecknad $1-$, till $-a_0 I$. Precis vid tidpunkten 1 inträffar betalningen a_1, varför tillgodohavandet strax efteråt, vid tidpunkten 1^+, uppgår till $-a_0 I - a_1$. Observera att en negativ betalning, dvs. en utbetalning till bankräkningen, leder till en ökning i tillgodohavandet, och en positiv betalning, dvs. en inbetalning från bankräkningen, leder till en minskning i tillgodohavandet. Därav minustecknen. Fortsätter vi till tidpunkten 2 ser vi att tillgodohavandet strax innan, vid 2^-, uppgår till $-a_0 I^2 - a_1 I$ och strax efteråt, vid 2^+, till $-a_0 I^2 - a_1 I - a_2$. Vid den sista tidpunkten m gäller att tillgodohavandet strax innan, vid m^-, uppgår till $-a_0 I^m - a_1 I^{m-1} - ... - a_{m-1} I$, och strax efteråt, vid m^+ då den sista betalningen redan inträffat, till $-a_0 I^m - a_1 I^{m-1} - ... - a_{m-1} I - a_m$, vilket uttryck skall sättas lika med 0 för att uppfylla den verbala definitionen enligt vilken räkningen skall tömmas. Eftersom uttrycket är noll ändras ej dess värde när vi multiplicerar med -1, varför villkoret för I kommer att lyda:

$$a_0 I^m + a_1 I^{m-1} + ... + a_{m-1} I + a_m = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

Detta uttryck är en ekvation av m:te graden i I och en sådan kan ju ha upp till m olika rötter. Med andra ord kan, om inga restriktioner gäller för $a_0, a_1, ..., a_m$, upp till m olika numeriska värden beräknas för interna räntan från en given betalningsserie. Därav skulle då följa att, ehuru kapitaliseringsperioden är bestämd och det matematiska sambandet givet, detta ändå kan leda till flera numeriska värden på interna räntan.

Det är även intuitivt förståeligt att interna räntan kan få flera olika värden. Låt oss ett slag tänka på analogin med en serie av bankinsättningar och uttag. Om serien är sådan att bankräkningen står på skuld under vissa perioder och på tillgodohavande under andra perioder, då innebär en högre räntesats en fördel under de perioder då räkningen står på tillgodohavande och en nackdel under de perioder då räkningen står på skuld. Dessa fördelar och nackdelar kan precis uppväga varandra, vilket betyder att serien av betalningar till och från den tänkta bankräkningen precis kan åstadkommas både vid en lägre och en högre räntesats. Överförd till investeringsproblemet betyder resonemanget att flera värden på en viss investerings interna ränta kan beräknas om vi inte ställer några särskilda restriktioner på utseendet av investeringens nettointäktsserie.

Dividera nu ekvation (2-1) med I^m och flytta om termerna så att vi erhåller

$$-a_0 = a_1 I^{-1} + \ldots + a_m I^{-m} \tag{2-2}$$

Detta villkor anger att kapitalvärdet vid tidpunkten 0 av investeringens förväntade betalningar skall vara lika med inköpskostnaden $-a_0$. Beteckna högra ledets värde med C. Det är tydligt att C är en kontinuerlig funktion av I som kan betcknas $C(I)$. Av villkoret $-a_0 = C(I)$ framgår att ifall $C(1) > -a_0$ och $C(\infty) < -a_0$, samt ifall $C'(I) < 0$ för alla $1 < I < \infty$ så måste det finnas ett och endast ett bestämt positivt värde på $i = I - 1$. De bägge förstnämnda förutsättningarna är lätta att tolka. Eftersom $C(1) = a_1 + \ldots - a_m$, innebär det sagda att

$$a_1 + \ldots + a_m > -a_0 \tag{2-3}$$

dvs. att summan av de förväntade betalningarna är större än inköpskostnaden. Vidare är $C(\infty) = 0$, varför det andra villkoret, lyder $a_0 < 0$, något som vi ju antog från början i och med att investeringen skulle börja med en kostnad.

Det senare villkoret att $C'(I) = -I^{-1}(a_1 I^{-1} + 2\,a_2 I^{-2} + \ldots + m a_m I^{-m}) < 0$ i intervallet $1 < I < \infty$ är ej särskilt lättolkat. Man kan emellertid säga att ifall $a_1, \ldots, a_m$ samtliga är icke-negativa, såsom exempelvis vid obligationer, kommer villkoret att gälla. Om det alltså gäller att $a_0 < 0, a_1 \geqslant 0, \ldots, a_m \geqslant 0$ samt $a_0 + a_1 + \ldots + a_m > 0$, kommer ekvation (2-1) att satisfieras för ett enda positivt värde på I, vilket dessutom erhåller ett större värde än 1 så att interna räntan, $i = I - 1$, blir positiv. Det bör emellertid observeras att dessa villkor endast är tillräckliga. $C'(I)$ kan vara negativt i hela intervallet utan att $a_1, \ldots, a_m$ samtliga är icke-negativa. Vidare kan ekvation (2-1) ha en unik reell rot, utan att $C'(I)$ behöver vara negativ i hela det aktuella intervallet. Det är visserligen sant, att förutsättningen om negativ derivata i ett intervall är tillräcklig för att polynomet ifråga ej skall ha mer än en reell rot. Det sagda är endast ett specialfall av den allmänna regeln att högsta antalet reella nollställen som ett polynom kan ha är ett mer än polynomets första derivata faktiskt har. Om första derivatan inte har något reellt nollställe alls, kan polynomet självt ej ha mer än ett nollställe. Däremot *kan* naturligtvis polynomet ha ett unikt reellt nollställe även om dess första derivata har ett eller flera nollställen.[1]

Generellt gäller att ett polynom av m:te graden har m nollställen. Dessa kan vara reella och differenta eller reella och sammanfallande eller också parvis konjugerat komplexa. När vi talar om unika rötter är det naturligtvis

[1] Se T. Nagell, »Lärobok i algebra», Uppsala 1949, kap. VI.

något oegentligt, ty rötternas antal är alltid lika högt som polynomets gradtal, och vi menar inte att alla rötterna skall sammanfalla. Det är endast så att vi ej är intresserade av vissa rötter. De komplexa lämnas därhän, likaså de negativa. Observera därvid att ett negativt värde på I, som vi ju talar om, leder till en intern ränta lägre än $-100\,\%$, vilket betyder att en skuld från en period förvandlas till ett tillgodohavande i nästa period och vice versa. Sådana lösningar är vi naturligtvis ej intresserade av. Vill man endast ha lösningar med positiv intern ränta, måste man ytterligare inskränka undersökningen av polynomets nollställen till värden på I som är större än ett.

Ett visst intryck av hur polynomet måste se ut för att leda till flera reella och positiva rötter får man genom att utnyttja det matematiska sambandet mellan rötter och koefficienter. Man kan alltid skriva ett polynom som en produkt av m lineära faktorer, vardera bestående av differenser mellan variabeln I och en av de m rötterna. Således gäller

$$a_0 I^m + a_1 I^{m-1} + \ldots + a_{m-1} I + a_m = a_0 (I - I_1) \cdot (I - I_2) \cdot \ldots \cdot (I - I_m) \qquad (2\text{-}4)$$

där $I_1, \ldots, I_m$ betecknar värden på I vid polynomets nollställen. Därvid gäller att $(-1)^t \cdot a_t/a_0$ är lika med summan av alla de olika produkter av t rötter som kan bildas bland de m rötterna $I_1, \ldots, I_m$. Ifall polynomet skall ha m positiva rötter gäller tydligen att $(-1)^t \cdot a_t/a_0 > 0$ för alla $t = 1, \ldots, m$, varför polynomets koefficienter omväxlande måste ha positivt och negativt tecken. Vidare gäller ju att summan av de olika produkter som kan bildas av t bland m rötter, är en summa av $\binom{m}{t}$ termer. Antalet termer i summan, och därmed det numeriska värdet på a_t/a_0, växer med t till $m/2$, varefter det åter avtar. Det sagda betyder att koefficienterna i mitten av polynomet måste ha höga numeriska värden jämfört med koefficienterna i ändarna. Sammanfattningsvis kan sägas att en investering kan ge lika många värden på interna räntan som antalet olika perioder under vilka investeringsverksamheten äger rum ifall positiva och negativa betalningar växlar från period till period och ifall de största — positiva och negativa — betalningarna äger rum vid mitten av den tid verksamheten varar.

De förda resonemangen har emellertid endast gett dels tillräckliga villkor för att man skall erhålla ett unikt värde på interna räntan och dels nödvändiga villkor för att man skall erhålla lika många värden som antalet betalningar i den serie vars interna ränta man beräknar. Så mycket mera kan man tyvärr inte säga om rötternas antal. Ytterligare ett sätt att diskutera problemet är emellertid följande

Ett polynom av m:te graden:

$$f(I) = a_0 I^m + a_1 I^{m-1} + \ldots + a_{m-1} I + a_m \qquad (2\text{-}5)$$

kan alltid divideras med en faktor $(I - I_*)$. Därvid erhålles ett nytt polynom av $(m-1)$:a graden:

$$g(I) = a_0 I^{m-1} + (a_0 I_* + a_1) I^{m-2} + \ldots + (a_0 I_*^{m-1} + a_1 I_*^{m-2} + \ldots + a_{m-1}) \tag{2-6}$$

Vid divisionen erhålles resten

$$f(I_*) = a_0 I_*^m + a_1 I_*^{m-1} + \ldots + a_{m-1} I_* + a_m \tag{2-7}$$

Det sagda betyder att man kan skriva

$$f(I) = (I - I_*) \cdot g(I) + f(I_*) \tag{2-8}$$

Antag nu att man har funnit ett ekonomiskt rimligt värde I_* för vilket polynomet av m:te graden har ett nollställe. Det sagda betyder att $f(I_*) = 0$ och att

$$f(I) = (I - I_*) \cdot g(I) \tag{2-9}$$

Det omtalade nollstället är unikt, när vi endast betraktar reella positiva värden på I, om, och endast om, $g(I)$ ej har något nollställe alls för $I > 0$. Något sådant nollställe finns ej för $g(I)$ ifall alla koefficienterna i polynomet $g(I)$ är icke-positiva. Dessa koefficienter är a_0, $(a_0 I_* + a_1)$, $(a_0 I_*^2 + a_1 I_* + a_2)$, etc. De betecknar de med interna räntan kalkylerade kapitalvärdena vid tidpunkterna 0, 1, 2, etc. av betalningarna i serien fram till och med dessa tidpunkter. Ifall vi återgår till analogin med en bankräkning betecknar dessa koefficienter med motsatt förtecken de belopp som tillgodohavandet på räkningen utgör vid tidpunkterna 0^+, 1^+, 2^+, etc. Förutsättningen att koefficienterna i $g(I)$ skall vara icke-positiva betyder således att investeraren aldrig under investeringens lopp står i skuld till den tänkta bankräkning på vilken lika hög ränta betalas som investeringens egen interna ränta. Försåvitt det är naturligt antaga att investeringar skall ha en sådan karaktär att de för investeraren utgör »tillgodohavanden» i sagda bemärkelse under hela sin livstid, kommer interna räntan att vara unik.

Koefficienterna i polynomet $g(I)$ kan även ges en annan tolkning. De utgör nämligen investeringens kapitalvärden kalkylerade med inerna räntan när verksamheten avbryts vid tidpunkterna 0, 1, 2, etc. Ifall något av dessa kapitalvärden är positivt, betyder det att en högre intern ränta skulle ha kunnat erhållas genom verksamhetens avbrytande före tidpunkten m, och att investeraren således alls ej skulle överväga att fortsätta verksamheten till slut. Emellertid vet vi ju inte om hela investeringsverksamheten då möjligen kan ha en ännu högre rot, varför det resonemanget ej är vidare framgångsrikt.

Det bör observeras att sådana nettointäktsserier för vilka flera värden på interna räntan kan beräknas leder till mycket egendomliga resultat för diskussionen om när en investering skall väljas och när den ej skall väljas. Antag för enkelhets skull att banklån och bankplaceringar kan göras till obegränsade belopp vid en och samma konstanta räntesats. I föregående kapitel har vi sett att i detta fall en investering skall väljas när dess nettointäktsserie har ett positivt kapitalvärde, men inte väljas när kapitalvärdet är negativt. Om exempelvis de två värdena 5 % och 8 % kan beräknas för interna räntan, kan kapitalvärdet vara positivt när det kalkyleras vid räntesatser under 5 %, negativt vid kalkylräntor mellan 5 % och 8 %, och därefter åter positivt när kalkylräntan överstiger 8 %. Detta betyder att investeringen skall genomföras när bankräntan ligger under 5 % eller över 8 % men icke när bankräntan ligger mellan 5 % och 8 %.

Motsvarande gäller för valet mellan två investeringar. Om vi skall jämföra två investeringar med nettointäktsserierna $a_0, \ldots, a_m$ och $b_0, \ldots, b_m$ respektive kan vi bilda differensinvesteringens nettointäktsserie $(a_0 - b_0), \ldots, (a_m - b_m)$. De kritiska räntesatser vid vilka de bägge investeringarna har lika stora kapitalvärden erhålles som interna räntesatser till differensinvesteringen. De kritiska räntesatserna avskiljer intervall för kalkylräntan inom vilka den ena eller andra investeringen har högre kapitalvärde, dvs. intervall inom vilka den ena eller andra investeringen skall väljas när in- och utlåning fritt kan ske till kalkylräntan.

Hela den tidigare diskussionen blir då tillämplig på differensinvesteringens nettointäktsserie. Det bör emellertid observeras att för differensinvesteringen oregelbundna nettointäktsserier lätt kan uppstå och att följaktligen investeringarna växelvis kan vara att föredra när bankräntan successivt stiger.

Av det ovan sagda framgår emellertid att vid flertalet investeringar, och i varje fall vid obligationer, ett entydigt positivt värde på interna räntan existerar då kapitaliseringsperioden i internräntedefinitionen är given.

Att det existerar en entydig intern räntesats betyder emellertid inte att den är lätt att beräkna. Den enda möjligheten som generellt står till buds har karaktären av »trial and error». Något lättare blir det för obligationer som ju har en viss likformighet i betalningsserien. Emellertid används, som vi skall se, onödigtvis dyrbara och svårhanterliga tabeller för detta ändamål, ty beräkningarna kan ske grafiskt på ett mycket enklare sätt. Innan vi går in på dessa problem skall vi emellertid härleda formlerna för effektivräntebestämningen vid kupongobligationer med de vanligaste intervallen mellan kupongernas förfallodata.

3. Effektiv ränta vid helårs-, halvårs- och kvartalskuponger

Vid härledningen av de matematiska sambanden för olika obligationer mellan kurs, återstående löptid, nominell och effektiv ränta skall vi utgå från den inledningsvis givna verbala definitionen. Enligt denna tänkte man sig ett tomt bankkonto på vilket ett belopp motsvarande obligationens pris insattes i inköpsögonblicket. Det på kontot innestående beloppet skulle förräntas med ränta på ränta, varvid kapitaliseringsperioden valdes godtyckligt. Från bankkontot skulle en serie uttag göras, till belopp och tidsfördelning överensstämmande med obligationens kupongräntebetalningar. Slutligen skulle vid den tidpunkt då obligationen inlöstes ett uttag motsvarande dess inlösningsvärde göras från bankräkningen. Den bankränta som skulle få betalas för att bankräkningen precis skulle tömmas med denna serie uttag definierades som obligationens effektiva ränta.

Sambandet mellan den på detta sätt definierade effektiva räntan, kursen, den nominella årsräntan och den återstående löptiden beror på dels hur ofta kupongräntan betalas ut och dels på hur ofta kapitaliseringen sker på den hypotetiska bankräkningen. Det förra tidsintervallet sammanhänger med faktiska förhållanden, medan det senare är en frihetsgrad i den verbala definitionen. För kupongräntans utbetalningar gäller i regel hela året, halvåret eller kvartalet som intervall. Kapitaliseringsintervallet borde naturligtvis överensstämma med vad som faktiskt tillämpas i bankerna, ty, som vi har sett, är den enda rationella grunden för att se effektiva räntan såsom ett objektivt kriterium vid valet mellan olika placeringsalternativ ett antagande om existensen av alldeles speciella villkor för transformation av de tidsfördelningar av betalningar som obligationerna representerar. Den enklaste typen av sådana transformationer är insättningar och lån i bank. Av detta skäl borde man vid definition av effektiv ränta helt enkelt använda det i bankerna faktiskt brukliga kapitaliseringsintervallet.

Vi skall nu härleda effektivränteformlerna för några olika intervall mellan kupongernas förfallodata och för några olika kapitaliseringsperioder. Betrakta först en obligation med helårskupong. Den inköps vid första årets början till priset $K \cdot A$, där K betecknar kursen och A betecknar nominella värdet. Efter m år inlöses obligationen till nominella värdet, men dessförinnan betalas en räntekupong med värdet $r \cdot A$ vid varje års slut. Nominella räntan betecknas med r. Betalningsfördelningen i tiden för denna obligation kan åskådliggöras på följande vis:

år		1	2		m
kr	$-KA$	rA	rA	rA	$rA + A$

Om kapitaliseringen i effektivräntedefinitionen sker vid årssluten, eller möjligen även vid tidpunkter mellan dessa, skall den årliga effektivräntan i ha ett sådant värde att kapitalvärdet

$$KA(1+i)^m - rA(1+i)^{m-1} - rA(1+i)^{m-2} - \ldots - rA(1+i) - rA - A = 0 \quad (3\text{-}1)$$

Divideras ekvationen med $A(1+i)^m$ och flyttas de negativa termerna över i högra ledet erhåller vi

$$K = r((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-m+1} + (1+i)^{-m}) + (1+i)^{-m} \quad (3\text{-}2)$$

Inom parentesen står en geometrisk series summa, vilken kan skrivas $(1/i)(1-(1+i)^{-m})$, varför ekvationen blir

$$K = r\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m}) + (1+i)^{-m} \quad (3\text{-}3)$$

Låt oss nu i stället se på en obligation med halvårskuponger. Dess ström av betalningar kan schematiskt representeras med

år		1		2				m		
kr	$-KA$	$\frac{rA}{2}$	$\frac{rA}{2}$	$\frac{rA}{2}$	$\frac{rA}{2}$			$\frac{rA}{2}$	$\frac{rA}{2}$	$\frac{rA}{2}+A$

Låt oss först anta att kapitalisering endast sker vid årssluten. För den kupong som betalas vid halvårsskiftet skall endast enkel ränta beräknas för tiden fram till årets slut. Detta betyder att kapitalvärdet vid varje års slut av alla under året förfallna kuponger blir $(rA/2)(1+i/2)+(rA/2) = (rA/2)(2+i/2)$. Sedan kan vi tillämpa den redan härledda formeln (3-1), varvid erhålles efter hyfsning

$$K = \frac{r}{2}\left(2+\frac{i}{2}\right)\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m}) + (1+i)^{-m} \quad (3\text{-}4)$$

Hade vi antagit att kapitaliseringen även sker vid halvårsskiftena, eller ännu oftare, skulle kapitalvärdena vid varje års slut av under året förfallande kuponger ha blivit $(rA/2)\cdot\sqrt{1+i}+(rA/2) = (rA/2)(1+\sqrt{1+i})$. Den relevanta formeln i detta fall skulle vara

$$K = \frac{r}{2}(1+\sqrt{1+i})\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m}) + (1+i)^{-m} \quad (3\text{-}5)$$

Slutligen kan vi se på fallet med kvartalskuponger. Om kapitaliseringen

sker vid årssluten skall enkel ränta räknas inom varje år. Kapitalvärdet av varje års kuponger vid årets slut blir

$$\frac{rA}{4}\left(1+\frac{3i}{4}\right)+\frac{rA}{4}\left(1+\frac{2i}{4}\right)+\frac{rA}{4}\left(1+\frac{i}{4}\right)+\frac{rA}{4}=\frac{rA}{4}\left(4+\frac{3i}{2}\right).$$

Den relevanta formeln blir

$$K=\frac{r}{4}\left(4+\frac{3i}{2}\right)\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \tag{3-6}$$

Hade vi valt halvåret som kapitaliseringsperiod skulle vi ha fått räkna enkel ränta inom halvåren men sammansatt ränta mellan dem. Kapitalvärdet vid varje halvårs slut av de kuponger som förfaller under detta blir

$$\frac{rA}{4}\left(1+\frac{\sqrt{1+i}-1}{2}\right)+\frac{rA}{4}=\frac{rA}{4}\left(2+\frac{\sqrt{1+i}-1}{2}\right).$$

Kapitalvärdet vid årssluten av hela årets kuponger blir då

$$\frac{rA}{4}\left(2+\frac{\sqrt{1+i}-1}{2}\right)(1+\sqrt{1+i})=\frac{rA}{4}\left(2+\frac{i}{2}+2\sqrt{1+i}\right)$$

och formeln övergår till

$$K=\frac{r}{4}\left(2+\frac{i}{2}+2\sqrt{1+i}\right)\frac{1}{i}(1+(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \tag{3-7}$$

Skulle kapitaliseringen ha ägt rum vid kvartalsskiftena, hade sammansatt ränta fått räknas mellan alla kvartal, och kapitalvärdet vid varje års slut av dess kuponger skulle ha blivit

$$\frac{rA}{4}((\sqrt[4]{1+i})^3+(\sqrt[4]{1+i})^2+(\sqrt[4]{1+i})+1)$$

Formeln hade i detta fall fått skrivas:

$$K=\frac{rA}{4}((\sqrt[4]{1+i})^3+(\sqrt[4]{1+i})^2+(\sqrt[4]{1+i})+1)\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \tag{3-8}$$

Övergången från ett kapitaliseringsintervall kan som synes av formlerna diskuteras som övergång från en nominell ränta till en annan. Vi kan undersöka hur stora skillnader i nominell ränta som de olika kapitaliseringsperioderna representerar. Låt oss börja med att betrakta obligationen med halv-

årskuponger, ty de olika kapitaliseringsperioder, ej längre än ett år, som vi diskuterar, leder till samma formel för obligationer med helårskupong. Binomialexpansion ger $\sqrt{1+i} = 1 + i/2 - i^2/8 + \ldots$ Eftersom termerna i expansionen har alternerande tecken samtidigt som de numeriskt blir successivt mindre, kan vi säga att en avbruten expansion ger en approximation vars fel i numeriskt värde ej kan bli större än den första av de försummade termerna. Approximationen ger ett för högt värde om denna första försummade term är negativ. Sålunda vet vi att $0 < (2 + i/2) - (1 + \sqrt{1+i}) < i^2/8$. Detta betyder att effektiva räntan för en obligation med halvårskuponger enl. (3-4) blir något större än enl. (3-5). Skillnaden motsvarar en skillnad i nominell ränta uppgående högst till $(r/2)(i^2/8)$. Denna övre gräns för skillnader blir större ju högre r och i är. Antar vi att både nominella och effektiva räntorna är så höga som 10 %, motsvarar alltså helårskapitalisering en högre nominell ränta med högst 1/160 %. Storleksordningen är alltså ytterst obetydlig.

Låt oss se på motsvarande för obligationer med kvartalskupong. Skillnaden mellan helårskapitalisering och halvårskapitalisering ser vi genom binomialexpansionen av $\sqrt{1+i}$; $2 + i/2 + 2\sqrt{1+i}$ i formel (3-7) kan approximeras med $2 + i/2 + 2(1 + i/2) = 4 + 3i/2$. Denna approximation ger ett för högt värde, där felet har en övre gräns av $2 \cdot i^2/8 = i^2/4$. I jämförelse med (3-7) motsvarar sålunda (3-6) en nominell ränta som är högre, men där avvikelsen ej överstiger $(r/4)(i^2/4)$, alltså samma gräns som vid obligationer med halvårskupong. Även här är skillnaden mellan helårs- och halvårskapitalisering obetydlig.

Låt oss även för fullständighets skull se på skillnaden mellan helårskapitalisering och kvartalskapitalisering. Binomialexpansioner ger

$$(\sqrt[4]{1+i})^3 = 1 + \frac{3i}{4} - \frac{3i^2}{32} + \ldots; \quad (\sqrt[4]{1+i})^2 = 1 + \frac{2i}{4} - \frac{4i^2}{32} + \ldots;$$

och

$$(\sqrt[4]{1+i}) = 1 + \frac{i}{4} - \frac{3i^2}{32} + \ldots.$$

Enligt analogt resonemang som ovan blir

$$4 + \frac{3i}{2} > ((\sqrt[4]{1+i})^3 + (\sqrt[4]{1+i})^2 + (\sqrt[4]{1+i}) + 1)$$

där skillnaden mellan de bägge uttrycken högst kan uppgå till

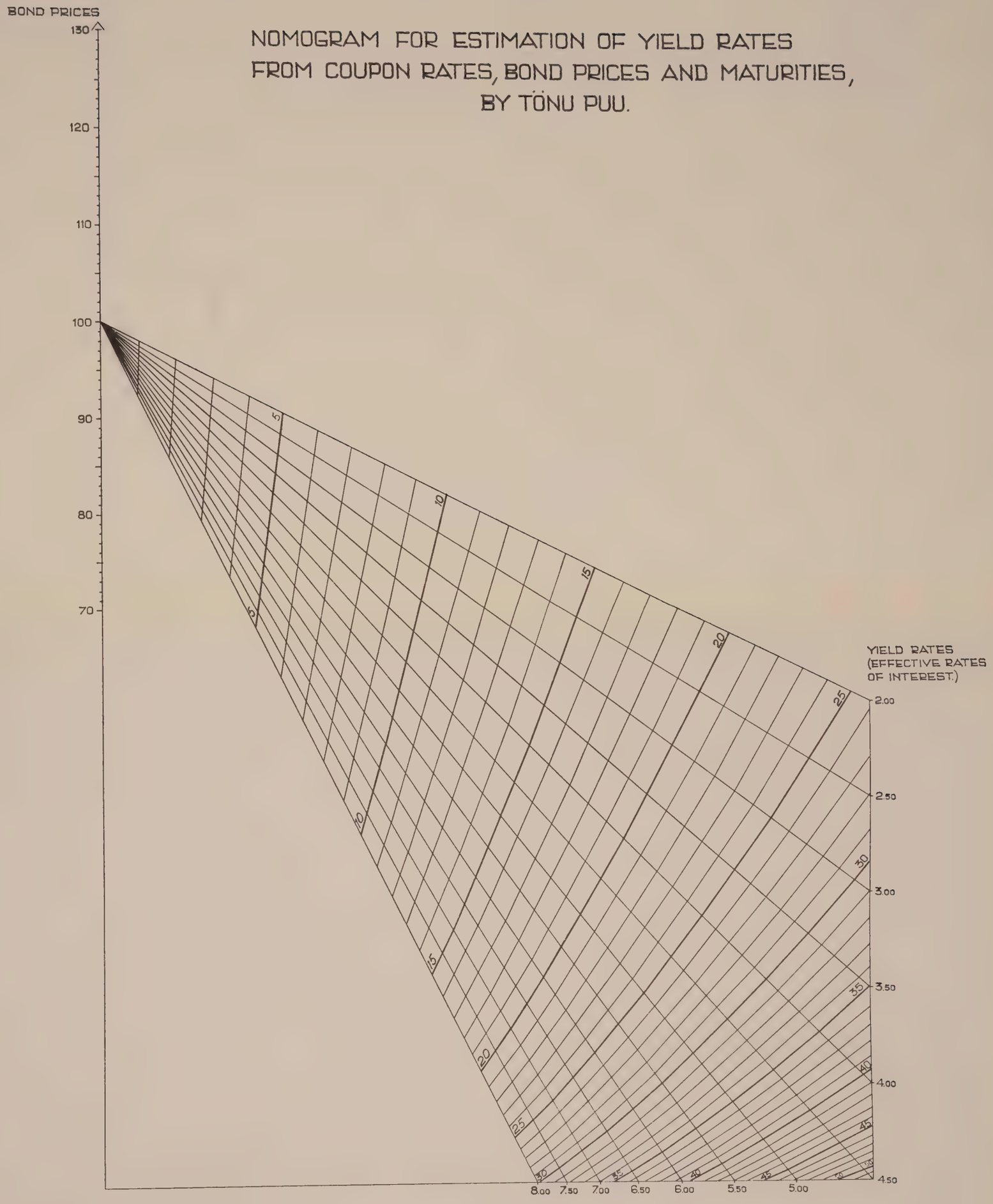
$$\frac{3i^2}{32} + \frac{4i^2}{32} + \frac{3i^2}{32} = \frac{10i^2}{32}$$

Formel (3-6) motsvarar sålunda i förhållande till formel (3-8) en högre nominell ränta, där skillnaden i denna har den övre gränsen $(r/4)(10i^2/32)$. Antar vi åter att $r = 0{,}1$ och $i = 0{,}1$, blir den högsta skillnaden i nominell ränta som de jämförda kapitaliseringsperioderna kan innebära 1/128 %. Skillnaden mellan helårs- och kvartalskapitalisering blir som väntat något större än skillnaden mellan helårs- och halvårskapitalisering, men den motsvarar fortfarande en skillnad i nominell ränta på mindre än 1/100 procent.

Vi har ej diskuterat halvårs- eller kvartalskapitalisering vid obligationer med helårskupong. Ej heller har vi berört kvartalskapitalisering vid obligationer med halvårskupong. Anledningen härtill är att valet av kapitaliseringsperiod alls ej påverkar effektiva räntan för de obligationer vars kuponger förfaller till betalning med större tidsintervall än den längsta av de jämförda kapitaliseringsperioderna. Härav följer naturligtvis att övergång till tätare kapitalisering sänker effektiva räntan för obligationer med ofta förfallande kuponger, men lämnar effektiva räntan opåverkad för obligationer med glesa kupongbetalningar. Sålunda kan det tänkas att övergång till tätare kapitalisering leder till att den obligation av två som har de oftast förfallande kupongerna, börjar avkasta den högre effektiva räntan, medan den vid glesare kapitalisering avkastade lägre effektiv ränta. Av detta följer att preferenserna mellan olika obligationer, ordnade efter höjden av deras effektiva räntor, ej kan vara entydiga med hänsyn till olika kapitaliseringsintervall. Frågeställningen har emellertid endast rent teoretiskt intresse då vi ju visat att skillnaderna mellan olika kapitaliseringsintervall för praktiska krav på noggrannhet väl kan försummas.

I fortsättningen utgår vi därför alltid från helårskapitalisering. Innan vi övergår till andra problemställningar vill vi emellertid framhålla att de skillnader i nominell ränta, vilka motsvaras av skillnader i olika tätt förfallande kuponger, är betydligt större än skillnaderna beroende på olika kapitaliseringsperiod. Halvårskuponger jämförda med helårskuponger motsvarar en högre nominell ränta med $ri/4$ såsom framgår av ekvationerna (3-5) och (3-3). Jämför vi kvartalskuponger med helårskuponger blir enl. (3-5) och (3-3) motsvarande skillnad i nominell ränta $3ri/8$. Vid både nominell och effektiv ränta på 10 % blir $ri/4 = \frac{1}{4}$ % och $3ri/8 = \frac{3}{8}$ % — således differenser av betydligt större ordning än vid olika kapitaliseringsperiod. Det nu sagda innebär emellertid ingen tvetydighet hos effektivräntebegreppet som preferensindikator, utan rekommenderar endast viss noggrannhet i beräkningarna när det gäller kupongräntans utbetalningsintervall.

NOMOGRAM FOR ESTIMATION OF YIELD RATES FROM COUPON RATES, BOND PRICES AND MATURITIES, BY TÖNU PUU.



4. En grafisk beräkningsmetod

Låt oss nu visa hur man överskådligt kan framställa sammanhanget mellan kurs, återstående löptid, nominell och effektiv ränta. Vi kan starta med det fall då kupongerna förfaller till betalning vid slutet av varje år och den definitionsmässiga kapitaliseringen även sker vid årsslut samtidigt med att kupongräntan utbetalas. Formeln löd för detta fall

$$K = r\frac{1}{i}(1+(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \tag{4-1}$$

För den fortsatta framställningen skall vi definiera två hjälpfunktioner:

$$x = \frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m}) \tag{4-2}$$

$$y = (1+i)^{-m} \tag{4-3}$$

Den senare av de nya variablerna, y, betecknar kapitalvärdet vid tidpunkten 0 av en krona som betalas ut vid tidpunkten m där diskonteringen sker med hjälp av effektiva räntan i. Likaså betecknar x kapitalvärdet vid tidpunkten 0 av en hel serie enkronasbetalningar vid var och en av tidpunkterna 1, 2, ..., m. Det är nu tydligt att vi kan skriva

$$K = rx+y \tag{4-4}$$

Vidare erhålles genom substitution av (4-3) i (4-2) följande samband mellan x och y:

$$x = \frac{1}{i}(1-y) \tag{4-5}$$

Ekvation (4-3) kan även skrivas

$$\frac{1}{i} = \frac{\sqrt[m]{y}}{1-\sqrt[m]{y}} \tag{4-3 a}$$

där endast positiva rötter beaktas. Slutligen ger substitution av (4-3 a) i (4-5) sambandet

$$x = (1-y)\frac{\sqrt[m]{y}}{1-\sqrt[m]{y}} \tag{4-6}$$

Högra ledet i denna ekvation kan även uttryckas som geometrisk serie, så att

$$x = \sqrt[m]{y} + (\sqrt[m]{y})^2 + \ldots + (\sqrt[m]{y})^m \qquad (4\text{-}6\,a)$$

Låt oss nu i följande figur, ett s. k. nomogram, avsätta x på den horisontella och y på den vertikala axeln. Betrakta ekvationerna (4-5) och (4-6). De uttrycker var sin parametriska funktion mellan x och y, där effektiva räntan i respektive löptiden m är parametrar. Genom att variera värdena på i och m kan vi rita in ett antal iso-effektivräntekurvor och iso-löptidskurvor. De förra blir räta linjer genom punkten $x = 0$, $y = 1$ med lutningen $dy/dx = -i$. De solfjäderformigt utstrålande linjerna i figuren motsvarar olika effektiva räntor vilkas värden finns angivna på den högra vertikala skalan, som nedtill övergår på den horisontella axeln. De stigande kurvorna i figurens rutmönster motsvarar olika löptider som finns angivna för vart femte år. Dessa kurvor har alltid positiv lutning och är konvexa mot den horisontella axeln. Löptidskurvorna ligger som synes allt tätare ju högre löptider det är fråga om. Kurvan för eviga obligationer kommer att sammanfalla med den horisontella axeln från origo. Observera att figuren endast motsvarar ett utsnitt av de vanligaste löptiderna, så att den har kapats av vid ett positivt värde på y-axeln från vilket x-axeln utgår.

Det är nu tydligt att varje obligation med given löptid och given effektiv ränta motsvarar en punkt i xy-planet, alltså en given kombination av värden på x och y. Denna punkt är naturligtvis skärningspunkten mellan den gällande iso-effektivräntelinjen och iso-löptidskurvan. Av detta framgår att om vi på något sätt kan bestämma den för obligationen gällande punkten på dess löptidskurva, så kan effektiva räntan lätt avläsas. Det är ju bara att avläsa effektivräntan för den iso-linje som passerar genom punkten i fråga. Avläsningen går lätt även om ingen inritad linje passerar genom själva punkten, ty det vertikala avståndet mellan iso-linjerna är överallt direkt proportionellt mot effektiva räntan. I figuren finns iso-linjer för varje halv procent inritade. Tätare linjer skulle göra figuren i det aktuella formatet oläslig, men det är möjligt att till stöd för avläsningen förse iso-löptidskurvorna med punkter för exempelvis varje tiondels procent. Det är naturligtvis även möjligt att uppnå varje önskad noggrannhet genom att öka formatet. I varje fall är som synes ett särskilt nomogram nödvändigt för de kortaste löptiderna.

Denna avläsning av effektiva räntan kan emellertid endast ske om vi kan bestämma punkten på iso-löptidskurvan. Betrakta därför ekvation (4-4). Denna utgör ett lineärt samband mellan x och y när kursen K och nominella räntan r är givna. Det är ju rimligt att vi även måste föra in de bägge sistnämnda storheterna förutom löptiden för att få effektiva räntan bestämd. Grafiskt motsvaras ekvation (4-4) av en rät linje genom punkten

$x = 0$; $y = K$ vars lutning är $dy/dx = -r$. Den punkt vi söker på iso-löptidskurvan erhålles där kurvan skärs av linjen $K = rx + y$. Denna räta linje skall utgå från värdet K på y-axeln. Vidare skall linjen som lutning ha värdet av den nominella räntan med negativt förtecken, dvs. den skall vara parallell med den av de i figuren inritade iso-effektivräntelinjerna som motsvarar en effektiv ränta med samma värde som den aktuella nominalräntan. Det är nu lätt att flytta lutningar exempelvis med hjälp av en s. k. parallell-linjal, dvs. ett par så hopkopplade linjaler att de alltid är parallella men avståndet mellan dem variabelt.

Effektivränteberäkningen omfattar då följande moment: a) Den ena av de parallella linjalerna läggs utmed den effektivräntelinje som har nominella räntans värde. b) Den andra linjalen flyttas så att den passerar kursvärdet på den vänstra skalan. c) Man följer denna andra linjal till den punkt som ligger på iso-löptidskurvan i fråga. d) Effektiva räntan avläses på den effektivräntelinje som passerar den erhållna punkten. Genom att kasta om ordningen i de olika stegen, kan man i stället beräkna kursen från effektiva räntan, löptiden och nominella räntan.

Den nomografiska tekniken tillåter alltså beräkningar som ej kan göras genom någon annan enkel grafisk eller matematisk metod. Den bygger på att vissa nya variabler införes, medan en del av de gamla representeras av kurvor eller lutningar i nomogrammet. På detta sätt kommer ett nomogram att innehålla informationer i en hel tabellsamling. Metoden torde innebära snabbare beräkningar och visar även de kvalitativa sambanden mellan de olika variablerna.

Vi skall nu genom ett exempel visa metodens användning. En obligation står i 85-procentig kurs, är nominellt 3-procentig och inlösas om 15 år till pari. Kupongerna förfaller till betalning vid slutet av varje år. Vad är effektiva räntan?

Man lägger linjalen AA utmed den linje som går från punkten 1 på den vänstra skalan till punkten 0,030 på den högra skalan. Därmed har vi fört in den nominella räntan 3 %.

Därefter ställer vi in linjalen BB så att den går genom punkten 0,85 på den vänstra skalan. Vi har nu fört in kursen 85 %.

Obligationen skulle ha 15 års återstående löptid. Vi söker den punkt, P, där linjalen BB träffar den av de stigande kurvorna i rutmönstret, som betecknas med siffran 15.

Effektiva räntan avläses på den högra skalan i den punkt där skalan träffas av en linje, som går genom punkten 1 på den vänstra skalan och punkten P. Detta sker i punkten 0,044. Effektiva räntan är alltså 4,4 %.

Detta nomogram är konstruerat för helårskuponger. För obligationer

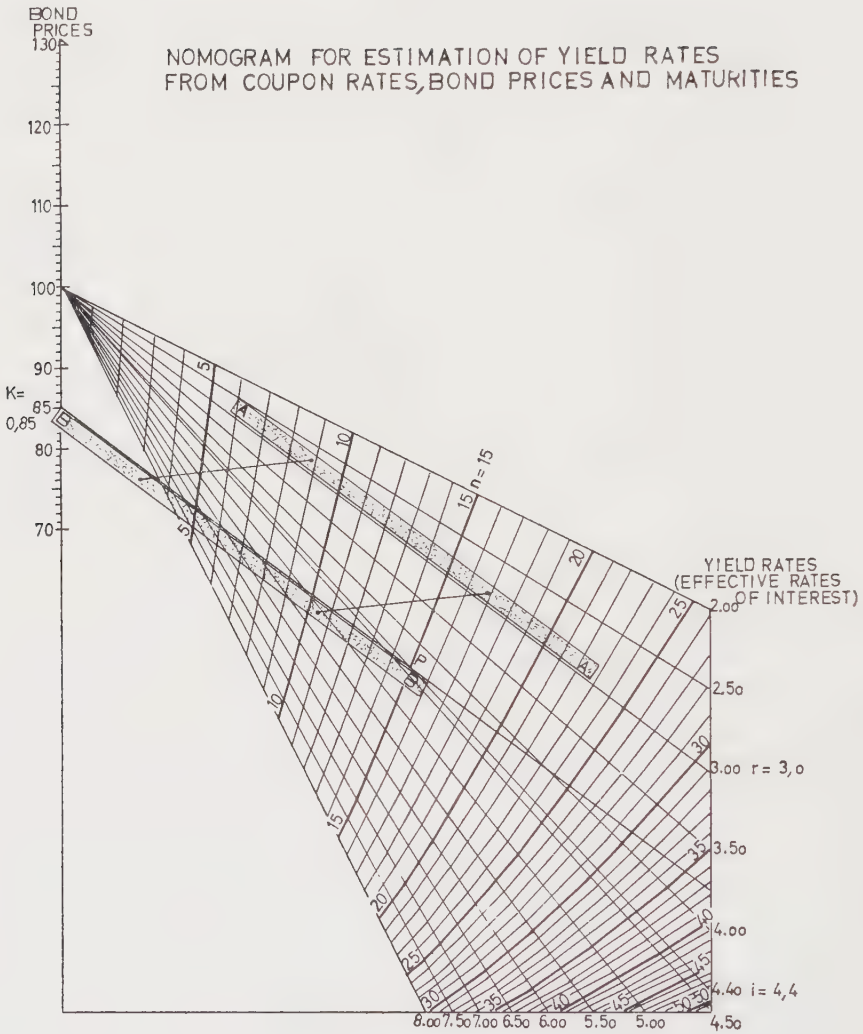


Fig. 9.

med halvårs- eller kvartalskuponger kan särskilda nomogram konstrueras efter samma principer. De olika kapitaliseringsperioderna behöver vi ej ta hänsyn till eftersom de leder till så små differenser. Emellertid finns det även metoder att använda ett nomogram konstruerat för helårskuponger vid halvårsvis eller kvartalsvis förfallande kuponger. Det som ligger närmast till hands är att exempelvis betrakta obligationen med halvårskuponger som en obligation med dubbel löptid och med halvårskupongen som nominell

ränta. Därigenom erhålles den halvårliga effektivräntan under förutsättningen att kapitaliseringen sker halvårsvis. Den årliga effektivräntefaktorn är då kvadraten på den halvårliga, vilket *ej* betyder att helårseffektivräntan är dubbla halvåreffektivräntan. Somliga tabeller synes vara beräknade under denna oriktiga förutsättning, något som i vissa fall leder till att effektiva räntan för en obligation blir lägre när halva kupongräntan under varje år utbetalas ett halvår tidigare.[1]

[1] Det sagda kan lätt visas. Vid helårskuponger gällde att

$$K = r\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \tag{4-7}$$

Skulle halvårseffektivräntan utgöra halva helårseffektivräntan, betecknad $j/2$, erhålles vid halvårskuponger:

$$K = \frac{r}{2}\cdot\frac{1}{\frac{j}{2}}\left(1-\left(1+\frac{j}{2}\right)^{-2m}\right)+\left(1+\frac{j}{2}\right)^{-2m}$$

$$= r\frac{1}{j}\left(1-\left(1+j+\frac{j^2}{4}\right)^{-m}\right)+\left(1+j+\frac{j^2}{4}\right)^{-m} \tag{4-8}$$

Som synes är $r \gtrless j$ när $K \gtrless 1$. Kursen för den obligation vars effektiva ränta jämförs vid dels helårskupong och dels halvårskupong under nämnda definition skall naturligtvis sättas lika. Sättes sålunda (4–7) och (4–8) lika erhålles efter hyfsning sambandet

$$\frac{\frac{r}{j}-1}{\frac{r}{i}-1} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{1-\left(1+j+\frac{j^2}{4}\right)^{-m}} \tag{4-9}$$

Detta samband måste vara uppfyllt när effektivräntorna vid helårskuponger och halvårskuponger, dvs. i och j, definierats så som angivits. Antag nu att obligationen står under pari, dvs. $i > r$, och att effektivräntan vid halvårskuponger ej är den lägre, dvs. $j \geqslant i$. Högra ledet i (4–9) erhåller då som lätt inses ett värde mindre än 1. Härav följer då, eftersom $i > r$ att

$$\frac{r}{j}-1 > \frac{r}{i}-1$$

eller $j < i$,vilket betyder en motsägelse. Om alltså en obligation står under pari, måste dess effektiva ränta bli lägre när halva kupongräntan ständigt utbetalas ett halvår tidigare; detta sker under förutsättning att man som i den vanliga tabellsamlingen »Comprehensive Bond Values» definierar hela årets effektiva ränta som dubbla värdet av halvårets.

Bevisföringen kan synas egendomlig. Den utnyttjar emellertid endast en enkel form för s. k. indirekt bevisföring. Låt satserna p och q svara mot villkoren $(i > r)$ och $(j < i)$ respektive. Negatet $\sim q$ svarar då självfallet mot villkoret $(j \geqslant i)$. Det som har sagts ovan är $p \wedge \sim q \rightarrow q$, vilket är liktydigt med $p \rightarrow q$, dvs. med att $i > r$ implicerar $j < i$. Se härom J. G. Kemney, J. L. Snell, G. L. Thompson, »Introduction to Finite Mathematics», Englewood Cliffs 1957, s. 46 ff.

Den angivna metoden är emellertid, även om helårsräntan riktigt beräknas från halvårsräntan, opraktisk då ett nomogram blir effektivast när ytan utnyttjas för de vanliga löptiderna och nominella räntorna. Detta kan inte ske när vid kvartalskuponger upp till fyrdubbla löptider och ner till fjärdedels nominalräntor skall beaktas. Ett bättre sätt är då att justera nominella räntan. Formlerna för effektiva räntan vid halvårsvis och kvartalsvis förfallande kuponger löd vid helårskapitalisering

$$K = r\left(1+\frac{i}{4}\right)\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \qquad (3\text{-}4\,a)$$

och

$$K = r\left(1+\frac{3i}{8}\right)\frac{1}{i}(1-(1+i)^{-m})+(1+i)^{-m} \qquad (3\text{-}6\,a)$$

Jämförs dessa med formel (4-1) inses lätt att vi, om nominella räntan ersätts med $r(1+i/4)$ respektive $r(1+3i/8)$, kan använda det tidigare nomogrammet för halvårs- och kvartalskuponger. Till en början kan detta synas omöjligt eftersom justeringsfaktorn innehåller effektivräntan, som ju skulle beräknas. Men justeringen blir så liten att en mycket hastig och ungefärlig skattning av effektiva räntan under förutsättning av helårskuponger ger ett tillräckligt noggrannt värde.

Det sagda kan illustreras med en anknytning till det föregående exemplet. Kursen var 85 %, nominella räntan 3 % och löptiden 15 år. Vid helårskuponger blev effektiva räntan 4,4 %. Genom att göra om beräkningen med $0{,}03 \cdot (4{,}044/4)$, dvs. 3,033 % insatt som nominell ränta i stället för 3 %, erhåller vi effektiva räntan vid halvårskuponger. På motsvarande sätt förfares vid kvartalskuponger. Som synes motsvarar en hel procents felgissning för effektiva räntan ett fel i den justerade nominella räntan på blott några hundradels procent. Det finns alltså inget praktiskt skäl att upprepa beräkningen ytterligare, ehuru man härigenom teoretiskt kan komma till vilken noggrannhet som helst.

Genom detta justeringsförfarande kan ett enda nomogram användas vid alla de vanliga perioderna för kupongbetalningar. Detta är ej möjligt vid tabeller, ty där finns ej de ojämna nominalräntor tabulerade som därvid erfordras.

5. Appendix om de av Boulding och Hicks definierade begreppen tidscentrum och produktionsperiod

Vi skall i föreliggande appendix visa att vissa av de andra sammanfattande begrepp, såsom tidscentrum och produktionsperiod, med hjälp av vilka man vid sidan av den interna räntesatsen söker beskriva godtyckliga betalnings-

serier, är lika artificiella som denna interna räntesats själv. För en godtycklig investering definierar Boulding tidscentra för dess intäkts- och utgiftsserier. Tidsintervallet från utgifts- och intäktscentrum kallas investeringsperiod.[1] Man tycker att en sådan investeringsperiod endast skulle bero på serien av nettointäkter, dvs. på skillnaden mellan intäkts- och utgiftsserierna. Emellertid kan det lätt visas att den av Boulding definierade investeringsperiodens längd beror på om positiva betalningar klassificeras som intäkter eller som avdrag på utgifterna och på om negativa betalningar klassificeras som utgifter eller som avdrag på intäkterna.

Låt vektorn $\mathbf{a}=[a_0,\ldots,a_m]$ beteckna serien av intäkter och vektorn $\mathbf{b}=[b_0,\ldots,b_m]$ beteckna serien av utgifter. Omklassificeringar av betalningarna enligt vad som ovan sagts åstadkommes genom att lämpliga vektorer $\mathbf{c}=[c_0,\ldots,c_m]$ adderas till såväl $\mathbf{a}$ som $\mathbf{b}$. — Komponenterna i $\mathbf{c}$ kan självfallet vara negativa. — Tidscentra för intäkts- och utgiftsserierna definieras som de tidpunkter vid vilka de med interna räntan kalkylerade kapitalvärdena av respektive serier har samma värden som respektive komponentsummor. Betecknas tidscentra med $T_{\mathbf{a}}$ och $T_{\mathbf{b}}$ samt interna räntefaktorn med I_* lyder definitionerna:

$$\sum_{t=0}^{m} a_t = \sum_{t=0}^{m} a_t \cdot I_*^{T_{\mathbf{a}}-t} = I_*^{T_{\mathbf{a}}} \sum_{t=0}^{m} a_t \cdot I_*^{-t}$$

$$\sum_{t=0}^{m} b_t = \sum_{t=0}^{m} b_t \cdot I_*^{T_{\mathbf{b}}-t} = I_*^{T_{\mathbf{b}}} \sum_{t=0}^{m} b_t \cdot I_*^{-t}$$

Interna räntan definieras emellertid så att nuvärdena av intäkts- och utgiftsserierna är lika, dvs.

$$\sum_{t=0}^{m} a_t \cdot I_*^{\,t} = \sum_{t=0}^{m} b_t \cdot I_*^{-t}$$

Härav följer nu

$$I_*^{-T_{\mathbf{a}}} \cdot \sum_{t=0}^{m} a_t = I_*^{-T_{\mathbf{b}}} \cdot \sum_{t=0}^{m} b_t$$

eller

$$I_*^{T} = \frac{\sum_{t=0}^{m} a_t}{\sum_{t=0}^{m} b_t}$$

där $T=T_{\mathbf{a}}-T_{\mathbf{b}}$ betecknar investeringsperioden.

[1] Se K. E. Boulding, »Time and Investment», Economica 1936, s. 190. samt E. Schneider, »Investering og rente», København 1944, s. 14–15.

Det gäller uppenbarligen att värdet på interna räntesatsen är oberoende av de omklassificeringar genom addition till vektorerna **a** och **b** av vektorn **c** vilka diskuterats ovan. Detta framgår av att villkoret

$$\sum_{t=0}^{m} (a_t + c_t) \cdot I_*^{-t} = \sum_{t=0}^{m} (b_t + c_t) \cdot I_*^{-t}$$

gäller för alla vektorer **c** så snart I_* definieras av villkoret

$$\sum_{t=0}^{m} a_t \cdot I_*^{-t} = \sum_{t=0}^{m} b_t \cdot I_*^{-t}$$

Eftersom I_* är oberoende av vektorn **c** följer att T måste förändras när I_*^T förändras. Nu blir emellertid

$$I_*^T = \frac{\sum_{t=0}^{m} a_t + \sum_{t=0}^{m} c_t}{\sum_{t=0}^{m} b_t - \sum_{t=0}^{m} c_t}$$

när omklassificeringar av intäkter och utgifter görs med vektorn **c**. Vektorn **c** påverkar följaktligen värdet på I_*^T — och således även värdet på T — om inte något av villkoren

$$\sum_{t=0}^{m} a_t = \sum_{t=0}^{m} b_t$$

eller

$$\sum_{t=0}^{m} c_t = 0$$

gäller. Det förstnämnda villkoret betyder att investeringens interna räntesats är noll, medan det senare ställer en alldeles godtycklig restriktion på att omklassificeringarna av investeringens intäkter och utgifter under olika perioder precis skall uppväga varandra. Så länge dessa speciella villkor ej är uppfyllda kommer emellertid investeringsperioden att bero på om inbetalningar klassificeras som intäkter eller utgiftsavdrag och på om utbetalningar klassificeras som utgifter eller intäktsavdrag.

Ett begrepp av samma karaktär som Bouldings investeringsperiod — ehuru helt annorlunda definierat — är den av Hicks definierade genomsnittliga produktionsperioden för en serie av betalningar som resulterar från en tidskrävande produktionsprocess. Denna genomsnittliga period beräknas som ett vägt »medeltal» av de tidpunkter då betalningar utfaller i serien, varvid beräkningen sker med hjälp av vikter vilka utgöras av de relativa

andelar som respektive betalningars nuvärden har i hela betalningsseriens nuvärde.[1]

Betecknas den vektor som motsvarar serien av betalningar med $\mathbf{d} = [d_0, \ldots, d_m]$, kalkylräntefaktorn med I och den genomsnittliga perioden med P, erhålles från definitionen följande matematiska samband

$$P = \sum_{t=0}^{m} t \cdot d_t \cdot I^{-t} \Big/ \sum_{t=0}^{m} d_t \cdot I^{-t}$$

Det förefaller nu rimligt att en definition av den genomsnittliga perioden skall vara sådan att dess numeriska värde ej överstiger det totala antalet perioder som produktionen hålles i gång. Skulle det vara fråga om investeringar med endast en utbetalning vid tidpunkten 0 och endast en inbetalning vid tidpunkten m bör den genomsnittliga perioden bli m. Skulle ordningen för in- och utbetalningarna bli omkastad bör den genomsnittliga perioden bli $-m$. Dessa värden bör emellertid vara gränser för genomsnittet. Generellt finns det icke något skäl för att antaga $-m \leqslant P \leqslant m$, eller annorlunda uttryckt

$$\left| \sum_{t=0}^{m} t \cdot d_t \cdot I^{-t} \right| \leqslant \left| \sum_{t=0}^{m} m \cdot d_t \cdot I^{-t} \right|$$

Som ett exempel där villkoret ej är uppfyllt kan vi betrakta en investering vilken innebär inköp av en apparat för 300 kr. Apparaten förutsätts bli helt försliten under loppet av fyra år. Med dess hjälp kan man vid slutet av vart och ett av de fyra åren beräkna att erhålla intäkter med 100 kr. Investeringen kan sålunda beräknas avkasta en årlig intern räntesats av ca 12 % och är av mycket ordinärt slag. Man väntar sig att den genomsnittliga produktionsperioden skall ligga någonstans omkring 2 år. Visserligen kan den genomsnittliga perioden väntas något bero på kalkylräntan, men genomsnittet bör ju i huvudsak representera egenskaperna hos investeringens betalningsserie, varför kalkylräntans inflytande borde vara ringa. Emellertid blir vid en kalkylränta på 5 % $P = 16$ år och vid en kalkylränta på 10 % $P = 45$ år. Den genomsnittliga produktionsperioden för en ordinär investering vid vilken verksamheten över huvud taget endast varar 4 år blir således enligt Hicks definition 16 år eller 45 år beroende på vilken av de icke särskilt orimliga kalkylräntorna 5 % och 10 % som man väljer! Beräkningarna framgår av följande tabell:

[1] Se J. R. Hicks, »Value and Capital», Oxford 1946, s. 186 och s. 218 ff.

t	d_t	$d_t \cdot 1{,}05^{-t}$	$t \cdot d_t \cdot 1{,}05^{-t}$	$d_t \cdot 1{,}10^{-t}$	$t \cdot d_t \cdot 1{,}10^{-t}$
0	− 300	− 300,00	0,00	− 300,00	0,00
1	100	95,24	95,24	90,90	90,90
2	100	90,70	181,40	82,64	165,28
3	100	86,38	259,14	75,13	225,39
4	100	82,27	329,08	68,30	273,20
$\sum_t$	—	54,59	864,86	16,97	754,77

$$P = \frac{864{,}86}{54{,}59} = 16 \qquad P = \frac{754{,}77}{16{,}97} = 45$$

Kapitel V

LÖPTIDSSTRUKTUREN AV EFFEKTIVA RÄNTOR

1. Problemställning

Den föregående analysen av problemet hur en portfölj optimalt skall sammansättas av olika obligationer för att uppnå en så gynnsam fördelning av konsumtionen över tiden som möjligt, är fullt rimlig om de inköpta obligationerna är avsedda att behållas tills de inlöses. Detta antagande är emellertid svårt att förena med antagandet att placeraren på nytt vid början av varje period fattar ett beslut rörande storleken och sammansättningen av sin förmögenhet för den kommande perioden. Det kan svårligen tänkas att placeraren varje gång han fattar ett beslut är omedveten om att han en period senare kommer att fatta ett nytt placeringsbeslut, vars innehåll kommer att bero på de då rådande obligationspriserna. Naturligtvis kan det tänkas att beslutet ej kommer att medföra någon förändring av portföljen utöver inlösningen av de obligationer vars löptid går ut, men detta sker vid en alldeles bestämd priskombination. Sålunda är det endast vid en mycket speciell prisutveckling för obligationerna som dessa verkligen kommer att behållas till sina inlösningsdata. Denna prisutveckling behöver ej ens bestå i att priserna förblir konstanta, utan består i regel i att priserna på obligationer förändras på ett särskilt sätt under tidens lopp. På grund av denna svårighet blir det nödvändigt att anta att placeraren är medveten om att han kan komma att sälja köpta obligationer före löptidens slut.

Det enklaste sättet att börja en sådan analys utgör antagandet att placerarna tror sig kunna sälja alla köpta obligationer vid varje periodskifte till på förhand med full säkerhet förutsedda kurser. Därvid kan man för varje obligation och varje särskild period ställa obligationens värde vid periodens slut inklusive eventuella under perioden förfallna kuponger i relation till dess värde vid periodens början. En jämförelse mellan dessa relationer för olika obligationer under en och samma period ger svar på frågan vilken obligation som är fördelaktigast under perioden i fråga. För varje period är den obligation gynnsammast vars värdeutveckling enligt det angivna kriteriet är högst. Man kan med utgångspunkt härifrån uppställa

matematiska villkor för de samband mellan de olika obligationernas förväntade kursutvecklingar som måste råda för att alla skall betraktas som likvärdiga. Ifall de faktiska förväntningarna hos placeraren ej lyder de härledda villkoren är det lätt att avgöra att det ena eller andra alternativet är gynnsammast.

Denna typ av analys leder fram till den traditionella teorin för löptidsstrukturen av effektiva obligationsräntor. Detta problem hör ju under marknadsteorin snarare än under teorin för det enskilda subjektets optimum, men i sin enkla form förutsätter den traditionella uppläggningen att alla placerare verkligen kan förutse framtiden med fullständig säkerhet, och att deras förväntningar, som sålunda endast är återspeglingar av den kommande faktiska utvecklingen, är helt identiska. Problemet att bestämma de samband mellan de förväntade utvecklingarna för olika obligationers kurser eller effektiva räntor som måste råda för att de olika obligationerna skall vara likvärdiga, blir under antagandet om »perfect foresight» identiskt med problemet att förklara sambandet mellan marknadsutvecklingarna av de olika obligationernas kurser.

2. Matematisk formulering

Vi behöver i den följande diskussionen hänföra olika storheter till vissa tidpunkter eller vissa tidsperioder alltefter respektive storheters karaktär. Av denna anledning kan det vara lämpligt att börja med en redogörelse för sambandet mellan tidpunkter och tidsperioder i våra beteckningar. Den tidrymd som diskussionen avser antas vara uppdelad i m lika långa perioder. Dessa perioder numreras från 1 till m. En icke närmare preciserad period betecknas med t. De tidpunkter som inleder eller avslutar någon av de m perioderna, till antalet $(m+1)$, numreras från 0 till m. En icke närmare preciserad tidpunkt betecknas med t. Sålunda gäller för varje period t att den inleds vid tidpunkten $(t-1)$ och avslutas vid tidpunkten t. Likaledes gäller för varje tidpunkt t att den utgör gränsen mellan perioderna t och $(t+1)$. Stundom skall vi i det följande identifiera en längre tidrymd — bestående av flera perioder i följd — med numret på den sista av dessa perioder, nämligen då tidrymden i fråga börjar med perioden nummer 1. Beteckningen t identifierar i så fall hela intervallet mellan tidpunkterna 0 och t.

Låt nu i_t vara effektiva räntan på enperiodiga obligationer under perioden t. Definiera sedan den enperiodiga diskonteringsfaktorn $v_t=(1+i_t)^{-1}$. Med hjälp av dessa symboler kan vi härnäst definiera den t-periodiga diskonteringsfaktorn för hela intervallet mellan tidpunkterna 0 och t, dvs.

$$b_t = \prod_{s=1}^{t} v_s \tag{2-1}$$

Detta är ett exempel på fall där t får identifiera en längre tidrymd som avslutas med perioden t. På samma sätt definierar vi

$$a_t = \sum_{s=1}^{t} b_s \tag{2-2}$$

Därvid betecknar b_t det diskonterade värdet vid tidpunkten 0 av en enkronasbetalning som utfaller vid tidpunkten t, och a_t det diskonterade värdet vid tidpunkten 0 av en hel serie enkronasbetalningar som utfaller vid tidpunkterna $1,...,t$. I bägge fallen beräknas kapitalvärdet med hjälp av de enperiodiga räntesatserna $i_1,...,i_t$.

Effektiva räntesatsen j_t avser t-periodiga obligationer och beräknas från kursen K_t — vilken gäller för t-periodiga obligationer vid tidpunkten 0. Även i detta fall avser t hela intervallet mellan tidpunkterna 0 och t. Vi definierar nu

$$y_t = (1 + j_t)^{-t} \tag{2-3}$$

och

$$x_t = \sum_{s=1}^{t} (1 + j_t)^{-s} = \frac{1}{j_t}\{1 - (1 + j_t)^{-t}\} \tag{2-4}$$

Substitution av y_t i uttrycket för x_t ger därvid

$$x_t = \frac{1}{j_t}\{1 - y_t\} \tag{2-5}$$

Vidare ser vi, eftersom ju $(1 + j_t)^{-1} = y_t^{1/t}$, att

$$x_t = \sum_{s=1}^{t} y_t^{s/t} = (1 - y_t) \cdot \frac{\sqrt[t]{y_t}}{1 - \sqrt[t]{y_t}} \tag{2-6}$$

Alla dessa samband har ju härletts i närmast föregående kapitel, så att det enda nya är fotindiceringen för x_t och y_t.

Låter vi r beteckna den nominella räntesatsen kan vi enligt definitionen för effektiv ränta i kap. IV skriva

$$K_t = r \cdot x_t + y_t \tag{2-7}$$

Eftersom x_t och y_t vid givet t endast beror på effektiva räntan j_t, bestämmes denna — när även nominella räntan r är känd — av värdet på kursen K_t. Även detta framgår av kap. IV.

Antag nu att man i stället för att placera värdet K_t i den t-periodiga obligationen köper en sekvens av enperiodiga obligationer. De enperiodiga obligationerna avkastar effektiva räntorna $i_1, \ldots, i_t$. Nu gäller för enperiodiga obligationer att var och en av dessa endast medför två betalningar — en utbetalning med marknadspriset när den inköps vid periodens början och en inbetalning med summan av inlösningsvärdet och obligationens enda kupong när den inlöses vid periodens slut. Härav följer att effektiva räntan för enperiodiga obligationer har samma karaktär som den vanliga bankräntan däri att varje belopp placerat i en sådan obligation vid början av perioden t vid dess slut har ackumulerats till $(1+i_t)$ gånger det placerade beloppet. Om nu K_t placeras vid tidpunkten 0 i successivt förnyade enperiodiga obligationer uppgår värdet vid tidpunkten t till

$$K_t \cdot \prod_{s=1}^{t} (1+i_s)^s = K_t \cdot \prod_{s=1}^{t} v_s^{-s} = K_t \cdot b_t^{-1} \tag{2-8}$$

Alternativt kan man vid tidpunkten 0 för beloppet K_t köpa en t-periodig obligation som vid tidpunkten t ger en krona i inlösningsvärde och som dessutom ger en serie av kupongräntebetalningar med r kronor vid var och en av tidpunkterna $1, \ldots, t$. Om vi vill beräkna det värde som det placerade beloppet vid tidpunkten t uppgår till i detta alternativ — för att jämföras med motsvarande värde vid successivt förnyade enperiodiga obligationer — då måste vi ta hänsyn till att alla räntekuponger som förfaller till betalning före tidpunkten t kan återinvesteras. Eftersom vi söker villkor för att alla placeringsformer skall vara likvärdiga bör det även vara likgiltigt i vad slags obligationer återinvesteringen sker. Vi väljer de enperiodiga obligationerna eftersom räkningarna då blir enklare. Skulle vi förutsätta återinvestering i längre obligationer måste vi ta hänsyn till att dessa i sin tur har räntekuponger som förfaller till betalning före inlösningsdatum och som följaktligen måste återinvesteras. Varje sådant mera komplicerat placeringsmönster måste ge samma slutvärde vid tidpunkten t, varför vi lika gärna kan välja former för återinvestering av kupongerna som förenklar härledningen. Ett belopp om r kronor som betalas vid tidpunkten s — efter tidpunkten 0 men före tidpunkten t — uppgår vid tidpunkten t efter placering i successivt förnyade enperiodiga obligationer till:

$$r \cdot \prod_{\tau=s+1}^{t} (1+i_\tau) = r \cdot \left(\prod_{\tau=1}^{\tau=t} v_\tau^{-1} \right) \cdot \left(\prod_{\tau=1}^{\tau=s} v_\tau \right) = r \cdot b_t^{-1} \cdot b_s \tag{2-9}$$

Värdet vid tidpunkten t av hela serien återinvesterade räntekuponger uppgår då till:

$$\sum_{s=1}^{t} r \cdot b_t^{-1} \cdot b_s = r \cdot b_t^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{t} b_s = r \cdot b_t^{-1} \cdot a_t \qquad (2\text{-}10)$$

Härtill kommer inlösningsvärdet 1 krona, varför slutvärdet vid tidpunkten t av K_t kronor placerade vid tidpunkten 0 i det diskuterade alternativet uppgår till

$$r \cdot b_t^{-1} \cdot a_t + 1 \qquad (2\text{-}11)$$

För att placering i t successivt förnyade enperiodiga obligationer skall vara precis likvärdig med placering direkt i en t-periodig obligation, varvid räntekupongerna dock återinvesteras i enperiodiga obligationer, måste slutvärdena vid tidpunkten t vara lika i bägge alternativen, dvs.

$$K_t \cdot b_t^{-1} = r \cdot b_t^{-1} \cdot a_t + 1 \qquad (2\text{-}12)$$

eller

$$K_t = r \cdot a_t + b_t \qquad (2\text{-}13)$$

Vi ser att a_t och b_t fullständigt bestäms av de enperiodiga räntesatserna $i_1, \ldots, i_t$. Sålunda bestäms kursen på t-åriga obligationer av dess nominella räntesats och av effektiva räntesatserna på de enperiodiga obligationer vilka tillsammans täcker den långa obligationens löptid. När vi vet kursen K_t kan vi sedan beräkna den t-åriga obligationens effektiva räntesats j_t enligt formeln $K_t = r \cdot x_t + y_t$ där x_t och y_t unikt bestäms av värdet på j_t.[1]

Genom att göra beräkningarna vid $t = 1, \ldots, m$ kan vi bestämma effektiva räntesatserna $j_1, \ldots, j_m$ eller hela den s. k. löptidsstrukturen av effektiva räntesatser för löptiderna $1, \ldots, m$ perioder beräknade enligt kurserna vid tidpunkten 0. Denna löptidsstruktur bestäms av de korta räntesatserna $i_1, \ldots, i_m$. Observera den olikartade betydelsen av periodindiceringen för i_t och för j_t. Indiceringen på i_t identifierar perioden t under vilken den enperiodiga obligationen löper, medan indiceringen på j_t identifierar en längre tidrymd bestående av de t första perioderna. För i_t anger t under vilken period obligationen löper, medan t för j_t anger obligationens återstående löptid. En fullständig tidslokalisering av en obligation kräver naturligtvis angivelse både av löptidens längd och av löptidens inplacering i tiden genom exempelvis den tidpunkt då löptiden skall anses börja. I fallet i_t är emellertid löptiden alltid en period varför man kan nöja sig med att ange tidsplaceringen av respektive löptid, medan i fallet j_t löptiden alltid skall börja vid tidpunkten 0 varför man kan nöja sig med att ange löptidens längd.

[1] Detta stämmer helt överens med formlerna hos J. B. Williams, »The Theory of Investment Value», 1937, s. 115 ff.

Man skulle emellertid kunna vid vilken som helst tidpunkt s, där $0 \leq s \leq m$, beräkna kurser och effektiva räntesatser för alla obligationer med återstående löptider från 1 till $(m-s)$ perioder vid kännedom om de enperiodiga effektiva räntesatserna $i_{s+1}, \ldots, i_m$. I så fall finge vi för de längre obligationernas del ange inte bara löptidens längd utan även dess inplacering i tiden. Vi skall dock endast nöja oss med att konstatera att kännedom om $i_1, \ldots, i_m$ låter oss bestämma — inte bara kurserna för samtliga obligationer av löptiderna $1, \ldots, m$ perioder vid tidpunkten 0 — utan även hela utvecklingen av dessa obligationskurser fram till tidpunkten m och likaså hela utvecklingen av kurserna på obligationer som ännu ej har utgivits vid tidpunkten 0 men som skall inlösas senast vid tidpunkten m. Från alla dessa obligationskurser kan man naturligtvis beräkna motsvarande effektiva räntor. *Med hjälp av de enperiodiga effektivräntorna* $i_1, \ldots, i_m$ *kan man beräkna effektiva räntesatserna när som helst vid tidpunkterna* $0, \ldots, m$ *för alla obligationer som inlösas vid någon av tidpunkterna* $1, \ldots, m$. Vi är i det följande endast intresserade av löptidsstrukturen $j_1, \ldots, j_m$ vid tidpunkten 0 och dess relation till den enperiodiga effektivräntans utveckling $i_1, \ldots, i_m$. Denna löptidsstruktur bestäms såsom vi har sett genom formlerna $r \cdot a_t + b_t = r \cdot x_t + y_t$ för $t = 1, \ldots, m$, där a_t och b_t bestäms av $i_1, \ldots, i_t$ samt x_t och y_t bestäms av j_t.

Vi har vid tal om löptidsstrukturen resonerat som om varje effektiv räntesats — beräknad vid tidpunkten 0 — endast skulle bero på de enperiodiga räntesatserna $i_1, \ldots, i_m$ och på löptidens längd t. Emellertid beror ju det matematiska sambandet mellan j_t och $i_1, \ldots, i_t$ även på den nominella räntesatsen r. Ifall vi ej kan visa att nominella räntan endast uppträder för syns skull i formlerna och att värdet på j_t vid givna $i_1, \ldots, i_t$ är opåverkat av värdet på r, kan vi uppenbarligen inte tala om någon entydig löptidsstruktur. Det finns en löptidsstruktur för varje nominell räntesats. Om vi låter nominella räntan variera med löptiden i stället för att hålla den konstant — vi måste då skriva r_t med löptidsindex — kommer löptidsstrukturen av effektiva räntor att bero på hur nominella räntan r_t varierar med löptiden, dvs. på löptidsstrukturen av nominella räntor.

3. Variation av nominella räntan

Av denna anledning måste vi nu undersöka hur j_t vid givna $i_1, \ldots, i_t$ påverkas av r_t, dvs, hur effektiva räntan för en obligation av given löptid påverkas av dess nominella ränta. Betrakta därför ekvationen $K_t = r_t x_t + y_t$ där $y_t = (1+j_t)^{-t}$ och $x_t = (1/j_t) \cdot \{1-(1+j_t)^{-t}\}$. Derivering av K_t med avseende på r_t ger

$$\frac{dK_t}{dr_t} = x_t + \frac{\partial K_t}{\partial j_t} \cdot \frac{dj_t}{dr_t} \tag{3-1}$$

där dj_t/dr_t är den derivata som anger den sökta påverkan av den nominella räntan på den effektiva. Först observerar vi att $\partial K_t/\partial j_t = r_t \cdot \partial x_t/\partial j_t + \partial y_t/\partial j_t$. Därvid är $\partial y_t/\partial j_t = -t \cdot (1+j_t)^{-t-1} < 0$. Eftersom vi kan skriva $x_t = \sum_{s=1}^{t} (1+j_t)^{-s}$ blir $\partial x_t/\partial j_t = -\sum_{s=1}^{t} s \cdot (1+j_t)^{-s-1} < 0$. Härav följer att $\partial K_t/\partial j_t < 0$, dvs. att höjning av en obligations effektiva ränta under i övrigt lika förhållanden kommer att sänka dess kurs.

Nu bestämdes kursen enligt $K_t = r_t \cdot a_t + b_t$ där a_t och b_t berodde på $i_1, \ldots, i_t$. Sålunda finner vi

$$\frac{dK_t}{dr_t} = a_t \tag{3-2}$$

Detta betyder — eftersom $a_t > 0$ — att kursen på obligationer av given återstående löptid måste vara högre ju högre nominella räntan är, och vidare — eftersom $a_t = \sum_{s=1}^{t} b_s$ där $b_s > 0$ — att differensen i kurser vid given differens i nominella räntesatser är större ju längre återstående löptiden är för de jämförda obligationerna.

Vi kan nu sammanställa de bägge uttrycken för $dK_t/dr_t = a_t = x_t + (\partial K_t/\partial j_t) \cdot (dj_t/dr_t)$ vilket ger

$$\frac{\partial K_t}{\partial j_t} \cdot \frac{dj_t}{dr_t} = (a_t - x_t) \tag{3-3}$$

Eftersom $\partial K_t/\partial j_t < 0$ blir dj_t/dr_t positiv när $a_t < x_t$ och negativ när $a_t > x_t$. Vi vet emellertid att $K_t = r_t \cdot a_t + b_t = r_t \cdot x_t + y_t$ dvs. att $(b_t - y_t) = -r_t(a_t - x_t)$. Således kan vi säga att dj_t/dr_t har positivt värde när $a_t < x_t$ och $b_t > y_t$, negativt värde när $a_t > x_t$ och $b_t < y_t$ samt värdet noll när $a_t = x_t$ och $b_t = y_t$. Som synes lämnas effektiva räntan vid given löptid opåverkad av förändringar i nominella räntan om och endast om $a_t = x_t$ och $b_t = y_t$.

Ovan har vi sett att $x_t = \sum_{s=1}^{t} y_t^{s/t}$. Antag nu att $a_t < x_t$ och $b_t > y_t$. Eftersom både b_t och y_t är positiva följer att $b_t^{s/t} > y_t^{s/t}$ och även att $\sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t} > \sum_{s=1}^{t} y_t^{s/t}$. Sålunda kan vi finna att $a_t < x_t = \sum_{s=1}^{t} y_t^{s/t} < \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ dvs. att $a_t < \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ när $a_t < x_t$ och $b_t > y_t$. På samma sätt visas att $a_t > \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ när $a_t > x_t$ och $b_t < y_t$; samt att $a_t = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ när $a_t = x_t$ och $b_t = y_t$. Eftersom de de tre fallen utesluter varandra parvis kan vi säga att derivatan dj_t/dr_t är positiv, noll och negativ när och endast när a_t är mindre än, lika med och större än $\sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ respektive. Därmed har vi kommit till slutsatsen att tecknet på dj_t/dr_t endast beror på a_t och b_t såsom bestämda av $i_1, \ldots, i_t$.

Låt oss nu se vad villkoret $a_t = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ för att $dj_t/dr_t = 0$ betyder. Eftersom $\sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ är summan av en geometrisk serie kan vi skriva

$$\sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t} = b_t^{1/t} \cdot \frac{1 - b_t}{1 - b_t^{1/t}} \tag{3-4}$$

I det fall vi undersöker blir således $a_t = b_t^{1/t} \cdot (1 - b_t)/(1 - b_t^{1/t})$ eller annorlunda uttryckt

$$\frac{1 - b_t^{1/t}}{b_t^{1/t}} = \frac{1 - b_t}{a_t} \tag{3-5}$$

Därvid är vänstra ledet $(1 - b_t^{-1/t})/b_t^{1/t} = (b_t^{1/t} - 1) = (\prod_{s=1}^{t} v_s^{-1/t} - 1) = \{\prod_{s=1}^{t} (1 + i_s)^{1/t} - 1\}$. Som synes uttrycker produkten $\prod_{s=1}^{t}(1 + i_s)^{1/t}$ det geometriska genomsnittet av räntefaktorerna $(1 + i_1), \ldots, (1 + i_t)$. Vänstra ledet uttrycker således den genomsnittliga förräntningen för en serie av successivt förnyade enperiodiga obligationsplaceringar enligt en formel som används av Hicks för beräkning av den långa obligationsräntan.[1] Vi skall i fortsättningen beteckna denna räntesats som »Hicks' långa räntesats». För högra ledet i ekvationen ovan kan en lika enkel tolkning erhållas. Sätt först $r_t = j_t$. Eftersom $K_t = r_t \cdot x_t + y_t$ och $x_t = (1/j_t) \cdot (1 - y_t)$ följer att $K_t = 1$, dvs. att obligationen står i pari. Sedan substitueras $r_t = j_t$ och $K_t = 1$ i ekvationen $K_t = r_t \cdot a_t + b_t$, varvid erhålles $1 = j_t \cdot a_t + b_t$ eller $j_t = (1 - b_t)/a_t$. Det som står i högra ledet av den diskuterade ekvationen är således pariobligationens effektiva ränta. *Diskussionen ger slutsatsen att $dj_t/dr_t = 0$, dvs. den nominella räntan påverkar ej den effektiva räntan, om och endast om Hicks' långa ränta sammanfaller med pariobligationens effektiva ränta vid de enperiodiga räntesatserna $i_1, \ldots, i_t$.* Till pariobligationerna skall vi återkomma. Tills vidare nöjer vi oss med denna slutsats och skall i stället undersöka under vilka förhållanden man kan vänta sig att $dj_t/dr_t \gtrless 0$, dvs. att $a_t \lesseqgtr \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ Vi börjar med att härleda ett enkelt induktionsteorem. Antag att $a_t \geqslant \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$, dvs. att $dj_t/dr_t \leqslant 0$ gäller. Enligt definition är $b_{t+1} = b_t \cdot v_{t+1}$ och $a_{t+1} = a_t + b_{t+1} = a_t + b_t \cdot v_{t+1}$. Vi söker en tillräcklig förutsättning för att villkoret $a_{t+1} > \sum_{s=1}^{t+1} b_{t+1}^{s/(t+1)}$ skall gälla. Efter substitution av a_{t+1} och b_{t+1} övergår villkoret till

$$a_t + b_t \cdot v_{t+1} > \sum_{s=1}^{t} (b_t \cdot v_{t+1})^{s/(t+1)} + b_t \cdot v_{t+1} \tag{3-6}$$

Härnäst skriver vi om

$$\sum_{s=1}^{t} (b_t \cdot v_{t+1})^{s/(t+1)} = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t} \cdot \left(\frac{v_{t+1}}{b_t^{1/t}}\right)^{s/(t+1)} \tag{3-7}$$

[1] Se J. R. Hicks, »Value and Capital», 1946, s. 145 ff.

varvid det villkor vars tillräckliga förutsättning vi söker övergår till

$$a_t > \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t} \cdot \left(\frac{v_{t+1}}{b_t^{1/t}} \right)^{s/(t+1)} \tag{3-8}$$

Eftersom vi förutsätter att $a_t \geqslant \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t}$ kommer den tillräckliga förutsättningen att utgöras av $v_{t+1} < b_t^{1/t}$. *Följaktligen blir* $dj_{t+1}/dr_{t+1} < 0$ *under förutsättning att* $dj_t/dr_t \leqslant 0$ *och* $v_{t+1} < b_t^{1/t}$. *Genom att kasta om olikhetstecknen överallt i härledningen finner vi även att* $dj_{t+1}/dr_{t+1} > 0$ *under förutsättning att* $dj_t/dr_t \geqslant 0$ *och* $v_{t+1} > b_t^{1/t}$.

Nu gäller $a_1 = b_1 = v_1$, dvs. såväl $a_t \geqslant \sum_{s}^{t}{}_{1} b_t^{s/t}$ som $a_t \leqslant \sum_{t-1}^{t} b_t^{s/t}$ för $t = 1$. Upprepad tillämpning av induktionsteoremet leder följaktligen till att $dj_t/dr_t > 0$ när $v_{s+1} > b_s^{1/s}$ gäller för alla $s = 1, \ldots, (t-1)$ och till att $dj_t/dr_t < 0$ när $v_{s+1} < b_s^{1/s}$ gäller för alla $s = 1, \ldots, (t-1)$. Uppenbart är nu att $v_{s+1} > b_s^{1/s}$ för $s = 1, \ldots, (t-1)$ när $v_1 < v_2 < \ldots < v_t$; och att $v_{s+1} > b_s^{1/s}$ för $s = 1, \ldots, (t-1)$ när $v_1 > v_2 > \ldots > v_t$. Eftersom emellertid $v_s = (1 + i_s)^{-1}$ följer att $dj_t/dr_t > 0$ när $i_1 > i_2 > \ldots > i_t$ och att $dj_t/dr_t < 0$ när $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$. *Sålunda är effektiva räntan för t-åriga obligationer högre vid högre nominell ränta när effektiva räntan för enperiodiga obligationer successivt kommer att falla under de t perioderna, men lägre vid högre nominell ränta när effektiva räntan på enperiodiga obligationer kommer att stiga. Det betyder att man kan vänta sig att effektiva räntan är olika hög på långa obligationer av en och samma löptid men av olika hög nominell ränta ifall den korta effektivräntan väntas falla eller stiga starkt under de långa obligationernas löptid.*

4. Variation av återstående löptiden

Sedan vi nu har undersökt hur effektiva räntan för obligationer av given återstående löptid varierar med nominella räntan, skall vi övergå till att i stället undersöka hur effektiva räntan varierar med återstående löptiden för obligationer med given nominell ränta. Vi jämför i bägge fallen effektiva räntorna vid samma tidpunkt för olika obligationer. Observera särskilt i det senare fallet, att vi ej diskuterar förändringarna i effektiv ränta för en viss obligation medan dess återstående löptid förändras — utan olikheterna i effektiv ränta vid samma tidpunkt mellan obligationer med olika lång återstående löptid.

Låt oss då betrakta två obligationer som bägge har nominella räntan r och vilkas återstående löptider är t respektive $(t+1)$ perioder vid tidpunkten 0. Löptiderna skiljer sig sålunda med en period. Vid givna effektivräntor för de enperiodiga obligationerna under perioderna $1, \ldots, (t+1)$ bestäms de

bägge långa obligationernas kurser enligt $K_t = r \cdot a_t + b_t$ och $K_{t+1} = r \cdot a_{t+1} + b_{t+1}$. Kursskillnaden uppgår sålunda till:

$$(K_{t+1} - K_t) = r(a_{t+1} - a_t) + (b_{t+1} - b_t) \tag{4-1}$$

Nu vet vi att $a_{t+1} = a_t + b_{t+1}$ och $b_{t+1} = b_t \cdot v_{t+1}$. Följaktligen blir $(a_{t+1} - a_t) = b_t \cdot v_{t+1}$ och $(b_{t+1} - b_t) = -b_t(1 - v_{t+1})$.

Substitution ger:

$$(K_{t+1} - K_t) = r \cdot b_t \cdot v_{t+1} - b_t(1 - v_{t+1}) = b_t \cdot [(1+r) \cdot v_{t+1} - 1] =$$

$$= b_t \cdot \left[\frac{1+r}{1+i_{t+1}} - 1 \right]$$

Sålunda kan vi finna att $K_{t+1} > K_t$ när $i_{t+1} < r$ och att $K_{t+1} < K_t$ när $i_{t+1} > r$. *Det sagda betyder att kursen på obligationer med en period längre återstående löptid är högre respektive lägre än kursen på obligationer med godtyckligt lång återstående löptid beroende på om den — för bägge obligationerna sammanfallande — nominella räntan är högre eller lägre än effektiva räntan på sådana enperiodiga obligationer som löper mellan de bägge förstnämnda obligationernas inlösningsdata.*

Vi måste nu undersöka vilken förändring i effektiva räntan som mostvarar denna kursförändring. Härför skall vi först kalkylera den kursförändring $(K^*_{t+1} - K_t)$ som inträffar till följd av själva löptidsutsträckningen med effektiva räntan oförändrad vid värdet j_t även för de $(t+1)$-periodiga obligationerna. Det gäller att $K_t = r \cdot x_t + y_t$ och $K_{t+1} = r \cdot x_{t+1} + y_{t+1}$. Under förutsättning att $j_{t+1} = j_t$ blir enligt definitionerna $x_{t+1} = x_t + y_{t+1}$ och $y_{t+1} = y_t \cdot (1+j_t)^{-1}$, varför vi erhåller

$$(K^*_{t+1} - K_t) = (1+r) \cdot y_t \cdot (1+j_t)^{-1} - y_t = y_t \cdot \left[\frac{1+r}{1+j_t} - 1 \right] \tag{4-3}$$

Detta är ett kritiskt värde för kursförändringen. Om det gäller att den faktiska kursförändringen $(K_{t+1} - K_t)$ är större än den kritiska kursförändringen $(K^*_{t+1} - K_t)$, blir $j_{t+1} < j_t$; och om det i stället gäller att $(K_{t+1} - K_t) < (K^*_{t+1} - K_t)$, blir $j_{t+1} > j_t$. Skulle det slutligen vara så att $(K_{t+1} - K_t) = (K^*_{t+1} - K_t)$ blir naturligtvis $j_{t+1} = j_t$. Vi kan följaktligen säga att

$$j_{t+1} \gtrless j_t \tag{4-4}$$

allteftersom

$$b_t \cdot \left[\frac{1+r}{1+i_{t+1}} - 1 \right] \lesseqgtr y_t \cdot \left[\frac{1+r}{1+j_t} - 1 \right] \tag{4-5}$$

I nedanstående tabell har vi sammanfattat de fall i vilka man med säkerhet kan säga att den övre eller nedre av olikhetstecknen gäller, dvs. att j_{t+1} kommer att vara större eller mindre än j_t.

		$b_t \geqslant y_t$	$b_t \leqslant y_t$
$i_{t+1} > j_t$	$r > i_{t+1} > j_t$	?	$j_{t+1} > j_t$
	$i_{t+1} > r > j_t$	$j_{t+1} > j_t$	$j_{t+1} > j_t$
	$i_{t+1} > j_t > r$	$j_{t+1} > j_t$	?
$i_{t+1} < j_t$	$i_{t+1} < j_t < r$	$j_{t+1} < j_t$	?
	$i_{t+1} < r < j_t$	$j_{t+1} < j_t$	$j_{t+1} < j_t$
	$r < i_{t+1} < j_t$	?	$j_{t+1} < j_t$

Fallen över den dubbla linjen innebär att den enperiodiga obligationens effektiva ränta i_{t+1} är högre än den t-periodiga obligationens effektiva ränta j_t; medan fallen under den dubbla linjen innebär att den enperiodiga obligationens effektiva ränta i_{t+1} är lägre än den t-periodiga obligationens effektiva ränta j_t. Såväl tabellens övre som dess nedre hälft är uppdelad på tre rader, vilka uppifrån och ner motsvarar de fall då bägge, endast en, respektive ingen av obligationerna — dvs. den t-periodiga och den enperiodiga — står över pari. Kolumnerna avser de fall då $b_t \geqslant y_t$ respektive $b_t \leqslant y_t$. Såsom visats i närmast föregående avsnitt blir b_t större eller mindre än y_t beroende på vilka värden $i_1, \ldots, i_t$ har. Vi har sett att $b_t > y_t$ när $i_1 > i_2 > \ldots > i_t$ och att $b_t < y_t$ när $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$. En blick på tabellen visar att vi inte alltid kan dra slutsatsen att $i_{t+1} > j_t$ implicerar $j_{t+1} > j_t$ och att $i_{t+1} < j_t$ implicerar $j_{t+1} < j_t$. *Således gäller slutsatsen att effektiva räntan för en period längre obligationer är högre eller lägre än effektiva räntan för obligationer av någon godtycklig löptid beroende på om de senare nämnda obligationernas effektiva ränta överstiges eller understiges av effektiva räntan på enperiodiga obligationer under den period som skiljer de bägge långa obligationernas inlösningsdata i vissa fall men alls icke generellt. Man måste även ta hänsyn till den enperiodiga effektivräntans tidigare utveckling. För att göra saken ännu besvärligare beror det hela dessutom på om de olika obligationerna står över eller under pari.*

Man vill nu gärna uppfatta en lång obligations effektiva ränta som ett slags medeltal av de enperiodiga obligationernas effektiva räntor under den långa obligationens löptid. Det är nu inte riktigt klart vad som skall avses med »ett slags» medeltal. Det synes att medeltalet av en samling värden bör vara så beskaffat att det nya medeltalet — som erhålles när man utökar samlingen med ett värde — kommer att ligga någonstans mellan det gamla

medelvärdet och det nytillkomna värdet. Ifall det sagda skall vara definition på medelvärde är det emellertid klart att den effektiva räntan för en lång obligation inte alltid är ett medelvärde av de under den långa obligationens löptid förekommande enperiodiga obligationernas effektiva räntor.

5. Specialfall: pariobligationer

För ett speciellt fall kan man nu erhålla betydligt mer attraktiva resultat. Om vi endast betraktar pariobligationer kommer vi att kunna bortse från att nominella räntans höjd påverkar den effektiva räntan för obligationer av given löptid, ty vi betraktar ju endast sådana obligationer där nominella räntan är lika med den effektiva. Följaktiligen kan vi här tala om en entydig löptidsstruktur av effektiva räntor. Vidare blir i detta fall en lång obligations effektiva ränta verkligen ett medeltal av effektiva räntorna för de enperiodiga obligationer som förekommer under den långa obligationens löptid.

Såsom vi redan har sett blir i detta fall $r_t = j_t$ för alla $t = 1, \ldots, m$ och $K_t = 1$ för $t = 1, \ldots, m$. Följaktligen har vi för $t = 1, \ldots, m$ formlerna $1 = j_t \cdot a_t + b_t$ eller

$$j_t = \frac{1 - b_t}{a_t} =$$

$$= \frac{1 - \prod_{s=1}^{t} v_s}{\sum_{s=1}^{t} \prod_{p=1}^{s} v_p} = \tag{5-1}$$

$$= \frac{\prod_{s=1}^{t} (1 + i_s) - 1}{\sum_{s=1}^{t} \prod_{p=1}^{s-1} (1 + i_p) + 1}$$

Denna formel för j_t som explicit uttryck beräknat från $i_1, \ldots . i_t$ ges av Lutz utan härledning.[1]

Vi skall jämföra j_{t+1} med j_t. Nu är $j_{t+1} = (1 - b_{t+1})/a_{t+1}$ varvid enligt definitionerna $b_{t+1} = b_t \cdot v_{t+1}$ och $a_{t+1} = a_t + b_{t+1} = a_t + b_t \cdot v_{t+1}$. Substitution av dessa uttryck ger:

$$j_{t+1} = \frac{1 - b_t \cdot v_{t+1}}{a_t + b_t \cdot v_{t+1}} \tag{5-2}$$

[1] Se F. A. Lutz, »The Term Structure of Interest Rates», Quarterly Journal of Economics, 1940, s. 27.

Emellertid är $j_t = (1 - b_t)/a_t$ eller $a_t = (1 - b_t)/j_t$. Substitution av a_t i uttrycket för j_{t+1} samt division av bägge leden med j_t ger:

$$\frac{j_{t+1}}{j_t} = \frac{1 - b_t \cdot v_{t+1}}{1 - b_t + b_t \cdot v_{t+1} \cdot j_t} \tag{5-3}$$

Eftersom både täljaren och nämnaren är positiva blir

$$j_{t+1} \gtrless j_t \tag{5-4}$$

beroende på om

$$1 - b_t \cdot v_{t+1} \gtrless 1 - b_t + b_t \cdot v_{t+1} \cdot j_t \tag{5-5}$$

eller — då $b_t > 0$ — på om

$$-v_{t+1} \gtrless -1 + v_{t+1} \cdot j_t \tag{5-6}$$

Relationen kan även skrivas

$$\frac{1 - v_{t+1}}{v_{t+1}} \gtrless j_t \tag{5-7}$$

eftersom ju $v_{t+1} > 0$. Nu gäller enligt definitionen att $v_{t+1} = (1 + i_{t+1})^{-1}$ eller omskrivet att $i_{t+1} = (1 - v_{t+1})/v_{t+1}$. Resultatet blir entydigt att $j_{t+1} > j_t$ när $i_{t+1} > j_t$; och att $j_{t+1} < j_t$ när $i_{t+1} < j_t$. *När vi endast sysslar med pariobligationer, gäller det att effektiva räntan på långa obligationer av godtycklig återstående löptid alltid är högre eller lägre än effektiva räntan på en period kortare obligationer beroende på om de kortare obligationernas effektiva ränta överstiges eller understiges av effektiva räntan på de enperiodiga obligationer som löper mellan de bägge förstnämnda obligationernas inlösningsdata. Följaktligen blir effektiva räntan för långa pariobligationer verkligen ett medeltal av effektiva räntorna för de enperiodiga obligationer som infaller under de långa obligationernas löptid.*

Det skulle således vara mycket tilltalande i flera avseenden om man helt kunde bortse från nominella räntans inflytande och endast diskutera pariobligationer. *Emellertid har vi redan sett att nominella räntan kan försummas endast i mycket speciella situationer. Vi har även sett att där så kan ske kommer pariobligationernas effektiva ränta enligt Lutz's formel att sammanfalla med den enligt Hicks' mycket enklare formel beräknade effektiva räntan för en serie av successivt förnyade enperiodiga obligationer.* Eftersom bägge formlerna är riktiga i samma situationer kan man fråga sig om den mera komplicerade av dem överhuvudtaget behövs.

Nu visar det sig att de situationer det här gäller är så triviala att det överhuvudtaget inte behövs några formler för dem. Vi har sett att nominella räntan ej påverkar effektiva räntan för t-periodiga lån om och endast om $a_t = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s\,t}$. Nominella räntan kan alltså försummas vid alla löptider från 1 till m perioder om

$$a_t = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t} \tag{5-8}$$

gäller för alla $t = 1, \ldots, m$. Förutsätt nu att ekvationen gäller för något t. Eftersom definitionsmässigt $a_{t+1} = a_t + b_{t+1}$ och $b_{t+1} = b_t \cdot v_{t+1}$ blir liksom tidigare

$$a_{t+1} = a_t + b_t \cdot v_{t+1} \tag{5-9}$$

och

$$\sum_{s=1}^{t+1} b_{t+1}^{s/(t+1)} = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s/t} \cdot \left(\frac{v_{t+1}}{b_t^{1/t}} \right)^{s/(t+1)} + b_t \cdot v_{t+1} \tag{5-10}$$

Följaktligen kommer

$$a_{t+1} = \sum_{s=1}^{t+1} b_{t+1}^{s/(t+1)} \tag{5-11}$$

att gälla om och endast om $v_{t+1} = b_t^{1\,t}$. Härav följer nu — eftersom $a_1 = b_1$ — genom matematisk induktion att $a_t = \sum_{s=1}^{t} b_t^{s\,t}$ gäller för alla $t = 1, \ldots, m$ om och endast om $v_{t+1} = b_t^{1/t}$ för alla $t = 1, \ldots, m$. Eftersom $b_1^{1/1} = b_1 = v_1$ är dessa villkor i sin tur uppfyllda om och endast om $v_t = v_1$ för $t = 2, \ldots, m$, dvs. om och endast om $i_1 = i_2 = \ldots = i_m$. *Resultatet blir att nominella räntans inflytande kan försummas endast om de enperiodiga obligationernas effektiva ränta förblir konstant under perioderna* 1, ..., *m. Därvid behövs dock inga formler för att se att vid tidpunkten* 0 *effektiva räntorna för alla återstående löptider från* 2 *till m perioder även skall sammanfalla med den enperiodiga obligationens. I alla andra fall måste hänsyn tas till nominella räntan.*

I nedanstående figur — där skillnaderna för olika nominella räntor är starkt överdrivna — kan vi diskutera dessa problem. Figuren är ritad under förutsättningen att $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Såsom vi har sett kommer i detta fall effektiva räntan för obligationer av en och samma återstående löptid att bli lägre ju högre nominella räntan är. Vidare gäller det i regel att $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$ för varje r_t = konstant.

Löptidsstrukturerna av effektiva räntor har ritats in för de tre nominella räntesatserna 3, 4 och 5 %. Löptidsstrukturen för pariobligationer anges av den grova streckade linjen. För löptidsstrukturerna av obligationskurser gäller, såsom vi har sett, att kursen vid given löptid växer med nominella räntan och detta starkare ju längre löptiden är. För given nominell ränta

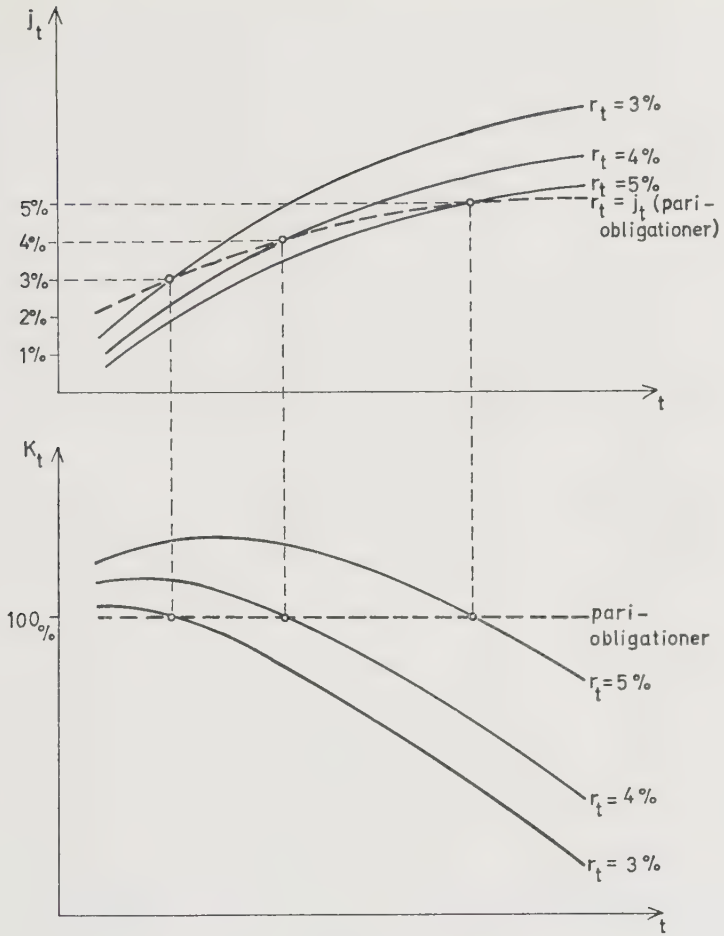


Fig. 10.

växer kursen med återstående löptiden så länge $i_t < r_t$ och faller därefter med återstående löptiden så länge $i_t > r_t$. Det är följaktligen möjligt att löptidsstrukturerna av kurser för de givna nominella räntorna 3, 4 och 5 % samtliga först växer och sedan faller med växande återstående löptid — såsom i figuren. Eftersom i_t successivt växer med t passeras 3, 4 och 5 % i tur och ordning, varför maxima för löptidsstrukturerna av kurser som i figuren kommer att förskjutas åt höger när nominella räntans värde är högre. Löptidsstrukturen för pariobligationer kommer därvid att bli en horisontell rät linje vid kursen 100 %.

Vi kan nu se varför det ej är möjligt att resonera så som Musgrave gör vid

sin behandling av sambandet mellan effektiva räntesatserna på obligationer av olika lång återstående löptid.[1] Musgrave använder Lutz' formel — vilken ju gäller för pariobligationer — till att från givna $i_1 \ldots . i_m$ beräkna löptidsstrukturen av effektiva räntor $j_1 \ldots j_m$. Det som då verkligen erhålles är den streckade kurvan i övre delen av vår figur. Sedan förutsättes helt enkelt att den härledda kurvan är löptidsstrukturen av effektiva räntor för obligationer med — *den med hänsyn till återstående löptiden konstanta* — nominella räntesatsen 3,42 %. En löptidsstruktur av kurser för $r_t = 3{,}42$ % härleds även och erhåller ett likartat förlopp som de heldragna kurvorna i den nedre delen av vår figur. Emellertid har man i och med att man diskuterar pariobligationer alls inte härlett löptidsstrukturen av effektiva räntor för $r_t = 3{,}42$ % — eller för någon annan konstant nominell ränta — utan en serie punkter på olika löptidsstrukturer för *olika* nominella räntesatser. Följaktligen kan man från denna serie av punkter heller inte erhålla löptidsstrukturen av kurser för $r_t = 3{,}42$ % — eller för någon annan konstant nominell räntesats — utan en serie av punkter på löptidsstrukturerna av kurser för *olika* nominella räntesatser. Dessa punkter ligger ej på någon krökt kurva utan på den horisontella räta linjen vid parikursen i nedre delen av vår figur.

Av vår diskussion torde även framgå att man måste vara försiktig när man vill tolka de förväntningar för den enperiodiga effektivräntans utveckling som »impliceras» av en given löptidsstruktur av effektiva räntor när nominella räntan på de förefintliga obligationerna varierar på ett godtyckligt sätt med återstående löptiden. Även om $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ och löptidsstrukturerna av effektiva räntor för samtliga konstanta nominella räntesatser — liksom för pariobligationer — är stigande som i vår figur, kan den löptidsstruktur av effektiva räntor som svarar mot en *godtycklig löptidsstruktur av nominella räntor* vara fallande. Så är fallet under förutsättning att obligationerna har lägre nominell ränta ju längre deras återstående löptid är. *En fallande löptidsstruktur av effektiva räntor kan därvid implicera att effektiva räntan på enperiodiga obligationer väntas stiga.* Även om man tar hänsyn till dessa ting är det naturligtvis av tvivelaktigt värde att beräkna »implicerade» ränteförväntningar från en faktisk löptidsstruktur av effektiva räntor eftersom det hela ju bygger på en teori där osäkerheten på ett orimligt sätt försummas.

[1] Se R. Musgrave, »The Theory of Public Finance», 1959, s. 592 ff.

6. Förändringar av löptidsstrukturen

Vi kan nu även diskutera en något annorlunda frågeställning, nämligen hur kursen och effektiva räntan varierar på en given obligation medan tiden förflyter och dess återstående löptid förkortas. Det blir därför i fortsättningen nödvändigt att använda en toppindicering på kurser och effektiva räntesatser angivande de tidpunkter till vilka dessa storheter hänförs. Kursen respektive effektiva räntan vid tidpunkten 0 på t-åriga obligationer betecknas K_t^0 och j_t^0. Motsvarande storheter en period senare — vid tidpunkten 1, då obligationen har hunnit bli $(t-1)$-årig — betecknas $K_{t\ 1}^1$ och j_{t-1}^1. Samma toppindiceringar måste även sättas ut på a_t^0 och b_t^0 respektive a_{t-1}^1 och $b_{t\ 1}^1$. Med dessa beteckningar blir $K_t^0 = r \cdot a_t^0 + b_t^0$ och $K_{t-1}^1 = r \cdot a_{t-1}^1 + b_{t-1}^1$.

Nu är $b_t^0 = \prod_{s\ 1}^{t} v_s$ och $b_{t-1}^1 = \prod_{s=2}^{t} v_s = (1/v_1) \cdot b_t^0$. Vidare är $a_t^0 = \sum_{s=1}^{t} b_s^0$ och $a_{t-1}^1 = \sum_{s=2}^{t} b_{s-1}^1 = (1/v_1) \cdot (a_t^0 \quad v_1)$. Följaktligen blir $K_{t-1}^1 = r \cdot (a_t^0 - v_1)/v_1 + b_t^0/v_1 = (1/v_1) \cdot (r \cdot a_t^0 + b_t^0) - r$. Kursförändringen mellan tidpunkterna 0 och 1 uppgår då till

$$(K_{t\ 1}^1 - K_t^0) = \left(\frac{1}{v_1} - 1\right) \cdot (r \cdot a_t^0 + b_t^0) - r = i_1 \cdot (r \cdot a_t^0 + b_t^0) - r \qquad (6\text{-}1)$$

Eftersom $K_t^0 = r \cdot a_t^0 + b_t^0$ ser vi att *summan av den — vid tidpunkten* 0 — *t-åriga obligationens relativa kursändring och dess omedelbara ränta under första perioden* $(K_{t-1}^1 - K_t^0)/K_t^0 + r/K_t^0$ *skall vara lika med effektiva räntan* i_1 *på den första periodens enperiodiga obligation. Det sagda betyder att* $(K_{t-1}^1 - K_t^0) \gtrless 0$ *beroende på om* $i_1 \gtrless r/K_t^0$, *dvs. att kursen på den (vid tidpunkten* 0) *t-åriga obligationen stiger eller faller under den första perioden beroende på om den enperiodiga obligationens effektiva ränta är högre än eller lägre än dess egen omedelbara ränta. Den omedelbara räntan definieras då i enlighet med Palanders definition som förhållandet mellan obligationens nominella ränta och dess kurs.*[1]

För att se vilken förändring i effektiv ränta som motsvarar den härledda kursändringen, skall vi först bestämma den kritiska kursförändring som svarar mot själva löptidsreduktionen med en period vid given effektiv ränta. Vi sätter därför $j_{t-1}^1 = j_t^0$. Därvid blir $K_t^0 = r \cdot x_t + y_t$ och $K_{t-1}^{1*} = r \cdot x_{t-1} + y_{t-1}$, där $y_t = (1 + j_t^0)^{-t}$ och $x_t = \sum_{s=1}^{t} (1 + j_t^0)^{-s}$. Som synes behövs ingen toppindicering på x_t och y_t eftersom dessa storheter endast beror på effektiv ränta och återstående löptid men ej på löptidens lokalisering i tiden.

[1] Se T. Palander, »Värdebeständighet», 1957, s. 169 ff.

När $j^1_{t\ 1} - j^0_t$ blir $y_{t\ 1} - y_t \cdot (1 - j^0_t)$ och $x_{t\ 1} - x_t\ \ y_t$. Den kritiska kursförändringen blir:

$$(K^{1*}_{t-1} - K^0_t) = r \cdot (x_{t-1} - x_t) + (y_{t-1} - y_t) = -r \cdot y_t + y_t(1 + j^0_t) - y_t = y_t(j^0_t - r) \tag{6-2}$$

Det gäller nu att $j^1_{t-1} \gtrless j^0_t$ beroende på om $(K^1_{t\ 1}\ \ K^0_t) \lesseqgtr (K^{1*}_{t\ 1} - K^0_t)$, dvs. att effektiva räntan kommer att stiga eller falla beroende på om den faktiska kursändringen är mindre eller större än den kritiska kursändringen. Med utnyttjande av de härledda uttryceken för dessa kursändringar kan vi säga att

$$j^1_{t-1} \gtrless j^0_t \tag{6-3}$$

beroende på om

$$i_1 \cdot (r \cdot a^0_t + b^0_t) - r \lesseqgtr y_t(j^0_t - r) \tag{6-4}$$

eller beroende på om

$$i_1 \cdot (r \cdot a^0_t + b^0_t) \lesseqgtr j^0_t \cdot \left\{ \frac{r}{j^0_t}(1 - y_t) + y_t \right\} \tag{6-5}$$

Nu gäller emellertid att $r \cdot a^0_t - b^0_t = K^0_t$. Vidare är ju $x_t = (1\ j^0_t) \cdot (1 - y_t)$, varför även $\{(r\ j^0_t) \cdot (1 - y_t) - y_t\} = \{r \cdot x_t + y_t\} = K^0_t$. Eftersom $K^0_t > 0$ erhålles slutsatsen att $j^1_{t-1} \gtrless j^0_t$ beroende på om $i_1 \gtrless j^0_t$. Det sagda betyder att *effektiva räntan på de obligationer som är t-åriga vid tidpunkten 0 stiger eller faller under den första perioden beroende på om obligationens effektiva ränta vid tidpunkten 0 har varit högre eller lägre än effektiva räntan på den första periodens enperiodiga obligationer.*

Sammanfattningsvis kan vi således säga följande beträffande förändringarna av kurser och effektiva räntesatser under tidens lopp. Kurserna faller under en viss period på de obligationer för vilka omedelbara räntesatsen — definierad som förhållandet mellan den nominella räntesatsen och kursen vid periodens början — ligger högre än effektiva räntan på de enperiodiga obligationer vilka löper under perioden i fråga: medan kurserna stiger på de obligationer för vilka omedelbara räntan ligger lägre än den enperiodiga obligationens effektiva ränta. Effektiva räntesatserna stiger under en viss period på de obligationer för vilka desamma vid periodens början är högre än för de enperiodiga obligationerna: medan effektiva räntesatserna faller på de obligationer för vilka desamma vid periodens början är lägre än för de enperiodiga obligationerna. Huruvida en lång obligations kurs stiger eller faller under en period framgår av en jämförelse mellan den långa obligationens omedelbara och den enperiodiga obligationens effektiva ränta, och huruvida dess effektiva ränta stiger eller faller framgår av en jämförelse mellan den långa och den enperiodiga obligationens effektiva ränta.

Kapitel VI

PORTFÖLJOPTIMUM FÖR EN ENSTAKA PERIOD VID OSÄKERHET

1. Något om problemställning och förutsättningar

Sättet att behandla osäkerhet om tillgångarnas framtida värde

I det följande skall vi behandla ett enskilt subjekts optimala förmögenhetssammansättning. Vi studerar fördelningen av en förmögenhet på två tillgångar, vilka kan vara två olika obligationer eller en obligation och pengar. Subjektet antas vara intresserat för förmögenhetens framtida penningvärde. I den mån förmögenheten, helt eller delvis, placeras i obligationer av längre löptid än tiden fram till det ögonblick då subjektet konsumerar förmögenheten, kommer osäkerhet om förmögenhetens framtida värde in i bilden. Däremot berör osäkerheten ej den del som hålles i form av kontanter. Detta betyder att vi bortser från osäkerheten i det framtida penningvärdet, ty skulle penningvärdet betraktas som osäkert, vore det nödvändigt att förutsätta subjektet handla med hänsyn till förmögenhetens realvärde.

Sålunda gäller det för subjektet att balansera fördelarna med en i genomsnitt gynnsammare värdeutveckling mot fördelarna med säkrare placeringsformer. De förstnämnda fördelarna avser långa obligationer i jämförelse med korta och obligationer i jämförelse med pengar, medan den större säkerheten representeras av korta obligationer i jämförelse med långa och pengar i jämförelse med obligationer.

Hur stor osäkerheten i de olika tillgångarnas framtida värden är, kan, liksom deras förväntade genomsnittliga värden, skifta alltefter omdömena från olika subjekt i samma situation. Det subjekt vi diskuterar antas ha subjektiva förväntningar för de olika tillgångarnas framtida värden. Vi antar vidare att förväntningarna preciseras i form av fullständiga sannolikhetsfördelningar som naturligtvis ej är ömsesidigt oberoende utan snarare positivt korrelerade. All tidigare erfarenhet talar ju för att obligationskurserna rör sig åt samma håll, ehuru utslagen brukar vara olika stora. Det innebär naturligtvis en orimlig schematisering att förutsätta att subjektet skulle formulera sina förväntningar som kvantitativt preciserade sannolik-

heter. Emellertid kan vi, liksom ofta göres i ekonomisk teori, låta teorin bli starkt abstraherad i den meningen att de vaga tankeprocesser som i verkligheten ligger bakom ett rationellt placeringsbeslut simuleras i en matematisk analogimodell. Alla de förutsättningar som teorin består av representerar motiv vilka dikterar beslut i verkligheten, ehuru de i teorin får en mekanisk prägel. Sålunda låter vi de vaga föreställningarna om olika konsekvenser som kan tänkas följa på ett placeringsbeslut och om deras respektive grader av sannolikhet i teorin bli lika preciserade som vid ett lotteri med kända sannolikheter.

Vi förutsätter nu som en första approximation att subjektet fattar sitt beslut genom att välja den bland möjliga kombinationer av medelvärde och varians för det framtida förmögenhetsvärdet som han anser vara gynnsammast. Förmögenhetens medelvärde beror på medelvärdena i förväntningsfördelningarna för de olika tillgångarna och på mängderna av de tillgångar som ingår i förmögenheten. Variansen beror likaså på mängderna av olika tillgångar, på varianserna i deras förväntningsfördelningar och på korrelationskoefficienterna mellan fördelningarna. De möjliga kombinationerna av tillgångskvantiteter beror på förmögenhetens aktuella värde och på tillgångarnas priser. Så snart kvantiteterna är givna bestäms förmögenhetens framtida medelvärde och varians.

Subjektet antas finna högt medelvärde och låg varians som önskvärda egenskaper. Emellertid är det knappast troligt att den förmögenhetssammansättning som ger högsta medelvärde även ger lägsta varians. Därför måste subjektet ha en fullständig preferensordning för de möjliga kombinationerna av medelvärde och varians. Denna preferensordning antas ha de vanliga rationalitetsegenskaperna, kontinuitet och transitivitet, hos ordinal nyttoteori. Dessutom förutsätter vi att de grundläggande axiomen för »expected utility»-doktrinen är uppfyllda.

Konsumtion, sparande och optimal förmögenhetssammansättning

Vi har nu sagt en del om sättet att behandla osäkerheten i förmögenhetens framtida värde, men gjort det som om framtiden vore en enda period. Dels bortser man härigenom från problemet hur mycket som skall konsumeras omedelbart och hur stor den finansiellt placerade förmögenheten skall vara. Dels bortser man från att framtiden består av många olika perioder för vilka nya konsumtions- och placeringsbeslut kommer att fattas och att förmögenheten, om den överhuvud taget avvecklas, följaktligen förbrukas över ett antal olika tidsperioder. Den förstnämnda komplikationen är lätt att ta hänsyn till och vi kommer därför även att behandla en tvåperiodmodell där omedelbar konsumtion förekommer och där förmögenheten som placeras

kan ökas eller minskas genom positivt eller negativt nysparande. Däremot antar vi i föreliggande kapitel att den förmögenhet som verkligen placerats kommer att förbrukas till sitt hela värde under den senare perioden.

I annat fall skulle preferenserna ha fått formuleras för konsumtionsbelopp vilka extraheras från förmögenheten vid ett godtyckligt antal olika tidpunkter. Det skulle då inte vara möjligt att fastställa förmögenhetens optimala sammansättning för en period i taget. Besluten måste ske i form av strategier som omfattar konditionella konsumtions- och placeringsbeslut för samtliga perioder. Behandlingen av sådana strategiproblem blir emellertid så komplicerad att vi skall uppskjuta den till följande kapitel.

Komparativ statik

Själva optimalvillkoren blir naturligtvis tämligen ointressanta i sig. Vi ställer upp dem för att kunna differentiera dem och alltså undersöka hur optimum för innehav av pengar och olika obligationer förskjutes vid förändringar i obligationernas priser. Vi kommer härvid att gå fram i två steg. Till en början antar vi att förväntningarna lämnas opåverkade av förändringar i de aktuella obligationspriserna. Även här gäller det att med en viss försiktighet tolka över resultaten från vanlig konsumtionsteori. Liksom i denna erhåller vi en substitutionseffekt till förmån för den tillgång vars pris har blivit relativt lägre. Skulle det gälla att placera en i penningvärde given förmögenhet vid olika obligationspriser, kommer vi att erhålla även en direkt motsvarighet till konsumtionsteorins inkomsteffekt beroende på att förmögenhetens reella köpkraft gentemot finansiella tillgångar förändrats. Dessutom tillkommer här ytterligare en effekt beroende på att förmögenheten i regel är given i mängder av de olika tillgångskategorierna och ej i penningvärde. Prisförändringar på tillgångarna påverkar således även värdet av den förmögenhet som skall placeras. Denna situation är speciell vid »stocks» och uppkommer i konsumtionsteorin om inkomsten ej är given i pengar utan i mängder av konsumtionsvarorna.

Skulle subjektet inneha optimala mängder av de olika tillgångarna vid de priser som råder när en förändring inträffar, kommer de bägge senare effekterna att helt uppväga varandra och endast en substitutionseffekt att kvarstå. Med andra ord har effekterna av förändrat förmögenhetsvärde och av förändrad köpkraft gentemot tillgångar vid givet förmögenhetsvärde samma styrka och motsatt riktning. Denna situation torde vara ganska realistisk då subjektet troligen successivt anpassar sammansättningen av sin förmögenhet till förändrade tillgångspriser.

Om det emellertid gäller att härleda en statisk efterfrågekurva för någon viss tillgång vilken anger de optimala mängderna av tillgången vid olika

från det aktuella priset avvikande tillgångspriser, då gäller det som närmast förut sagts endast i den punkt där den optimala tillgångsmängden är lika med den faktiskt innehavda. En sådan kurva anger hur efterfrågan reagerar på plötsliga engångsförändringar i tillgångspriset av olika storlek utan möjlighet för subjektet att anpassa tillgångsinnehavet successivt under förändringens gång. Av det sagda följer att det inte finns någon entydig efterfrågekurva för tillgången. Denna beror på den faktiskt innehavda tillgångsmängden. Så snart subjektet faktiskt anpassar förmögenhetens sammansättning till ett nytt optimalläge, gäller en ny efterfrågekurva. Detta innebär att sådana efterfrågekurvor aldrig är reversibla.

Förväntningarnas och preferensernas beroende av de aktuella tillgångspriserna

Ytterligare en omständighet skiljer tillgångsinnehavsteorin från konsumtionsteorin. När en prisförändring inträffar förändras subjektets preferenser. För en konsument är tillfredsställelsen från en given kombination av varumängder i regel oberoende av varornas priser, åtminstone så länge det gäller icke-varaktiga konsumtionsvaror. För den finansiella placeraren däremot är tillgångarna enbart ett medel att föra över köpkraft till framtiden. I den mån förväntningarna om tillgångarnas framtida värden påverkas av deras aktuella värden är det uppenbart att preferenserna ej kan vara oberoende av de aktuella tillgångspriserna. I det följande kommer vi att studera dels hur elasticitet i förväntningarna, dvs. benägenhet att justera de i genomsnitt förväntade tillgångspriserna åt samma håll som förändringar av aktuella priser, verkar. Dels kommer vi att studera effekten av ändringar i osäkerheten uppfattad som variationskoefficienten för en tillgångs förväntade värde.

Exkurs om förväntningar och riskvärdering

Vi skall i denna exkurs närmare diskutera det sätt på vilket vi i det följande har antagit att förväntningar vid osäkerhet rörande konsekvenserna av alternativa handlingssätt uppställs och värderas.

Vi börjar med förväntningarnas form. Det kan synas ligga nära till hands att uppställa en analogi mellan å ena sidan ett sådant osäkert engagement som investering i en obligationsportfölj och å den andra deltagande i hasardspel med givna sannolikheter. Med andra ord skulle förväntningarna ha den formen att alla tänkbara och varandra uteslutande utfall för en viss portfölj tilldelas kvantitativa sannolikheter. En placerare skulle alltså inte bara kunna säga att ett utfall är troligare än ett annat, utan han skulle dessutom veta precis hur många gånger mer sannolikt det ena värdet är. Det kan förefalla vara ett djärvt antagande, men det är absolut nödvändigt för att vi

överhuvudtaget skall kunna säga mer än att människor faktiskt träffar val i situationer där konsekvenserna är osäkra. Sannolikhetsformuleringen är nämligen den enklast analyserbara formen för osäkra förväntningar. Ett alternativt formuleringssätt utgör Shackle's teori om »potentiell överraskning», men denna bygger på lika speciella antaganden som sannolikhetsformuleringen och skulle vara betydligt mer opraktisk till att analysera de problem vi skall sysselsätta oss med.[1]

Det kan dock vara på sin plats med några reservationer mot antagandet om kvantitativa sannolikheter i förväntningarna. Vi kan såsom brukligt är skilja mellan risk och osäkerhet. Med risk brukar man avse de förlustrisker som en köpare av lotteribiljetter, eller en livförsäkringstagare, löper. Det väsentliga är här att man känner sannolikheterna. Man kan antingen, som i lotterifallet, sätta antalen av lottsedlar med de olika vinsterna i relation till totala antalet lottsedlar, eller också kan man, som i försäkringsfallet, se på dödsfallsstatistiken.

Sannolikheterna kan betraktas som gränsvärden mot vilka relativa frekvenserna av de olika utfallen konvergerar när antalet försök med en slumpmässig mekanism går mot oändligheten. Utfallet av varje enskilt försök beror på en systematisk och en slumpmässig faktor. Vid många försök tenderar slumpfaktorn att försvinna, medan den systematiska faktorn består. Nu finns emellertid slumpfaktorn med i det enskilda försöket och ofta är det bara fråga om ett enstaka försök. Icke desto mindre är den systematiska faktorn det enda man känner, eller rättare tror sig känna, varför rationella val måste ske med utgångspunkt från denna kända faktor.

Med osäkerhet avses sådana situationer där det inte förefaller finnas någon möjlighet att fastställa kvantitativa sannolikheter för de olika utfallen. Sannolikheterna i placerarnas förväntningar blir — om vi fortfarande förutsätter sådana — således rent subjektiva. Man kan tycka att det är egendomligt att för sådana fall förutsätta att placerarna formulerar subjektiva sannolikheter eller att de, annorlunda uttryckt, har kardinal tilltro till att olika händelser inträffar, när kardinalismen förkastats inom nyttoteorin. Som vi emellertid skall se kommer det hela i något annan dager när det visar sig att alla sannolikhetsomdömen är subjektiva.

Man kan nämligen mena att ingen egentligen är fullständigt säker på att den mekanism med hjälp av vilken man drar numren för vinstlotterna är slumpmässig. Man kan inte vara säker på att mekanismen har kontrollerats i ett tillräckligt stort antal försök varvid det konstaterats att alla lottsedlarna blivit dragna ungefär lika många gånger. Man tror endast att varje

[1] G. L. S. Shackle, »Uncertainty in Economics and Other Reflections», 1954.

sedel har lika stor chans att ge vinst, eller annorlunda uttryckt, man har ingen särskild anledning att tro något annat, och därför handlar man som om de olika lottsedlarna vore lika sannolika. Säg att en person kastar krona och klave. Om man visste exakt i varje relevant detalj hur vederbörande bär sig åt i ett kast, skulle man kunna förutsäga resultatet. Då skulle det inte finnas någon slump. Endast vid ofullständig insikt kommer slumpen in. Man vet att varje kast endast kan ge ett av två möjliga utfall. Någon annan kunskap har man inte. Men då det inte finns någon anledning att tro att endera skulle ha större chans att komma upp än den andra så förutsätter man att bägge är lika sannolika. Har man väl förutsatt det så kan man kalkylera sannolikheter för mera komplicerade händelser. Man räknar därvid alla de varandra uteslutande fall med lika sannolikheter som leder till den mera komplicerade händelsen och sätter antalet i relation till totala antalet elementära fall. Om man vill ta reda på sannolikheten för att minst 3 klave inträffar under en sekvens av 5 kast, förfar man alltså på detta sätt. Totalt finns det $2^5 = 32$ olika utseenden som sekvensen kan ha. När det inte finns någon anledning antaga att endera av krona eller klave har större chans än den andra i något av kasten, och när det vidare inte finns något skäl till att utfallen av de tidigare kasten påverkar sannolikheterna för de följande, blir vart och ett av de 32 fallen lika sannolikt. Det finns $\binom{5}{3} = 10$ olika sätt på vilka precis 3 klave kan inträffa i en sekvens av 5 kast. Likaså finns det $\binom{5}{4} = 5$ olika sätt på vilka precis 4 klave kan inträffa, och $\binom{5}{5} = 1$ sätt på vilket precis 5 klave kan inträffa. Minst 3 klave, dvs. händelsen precis 3, eller precis 4, eller precis 5 klave kan inträffa på $10 + 5 + 1 = 16$ olika sätt av 32 möjliga. Sannolikheten för minst 3 klave av 5 kast blir $\frac{16}{32} = 0{,}5$. Detta är en illustration till hur man får mera komplicerade sannolikheter. Eftersom dessa är kardinala kan man få intrycket att de har objektiv karaktär på något sätt. Emellertid har de kalkylerats under förutsättning av givna sannolikheter för vissa elementära fall. De givna sannolikheterna är lika för alla möjliga och varandra uteslutande händelser. De är inte lika därför att man tror sig veta att de är det, utan därför att man inte har anledning att tro något annat. Genom att betona sannolikhetsbegreppet som någonting vilket sammanhänger med ofullständig kunskap, blir alla sannolikheter subjektiva, varför det inte borde finnas någon skillnad mellan risk och osäkerhet.[1]

Det förefaller oss som om det ändå skulle föreligga en viss skillnad, bestående däri att man i riskfallet antingen har tillgång till statistik eller också kan specificera de olika elementära fall i vilka en sammansatt händelse inträffar. Fastän sannolikheterna är subjektiva även i riskfallet finns det

[1] Om detta se översiktsartikeln av K. J. Arrow, »Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations», Econometrica 1951, s. 413.

vissa metoder för kvantifiering av sannolikheterna. Det är däremot inte säkert att man vid osäkerhet kan redogöra för att man anser en händelse för sannolikare än en annan just därför att fler elementära fall leder till den ena händelsen och därför att man inte har skäl att hålla något elementärt fall för troligare än ett annat.

Antar man emellertid att förväntningarna för de osäkra konsekvenserna av varje handlingssätt kan representeras av en bestämd sannolikhetsfördelning, gäller nästa problem hur de sannolikhetsfördelningar som svarar mot alternativa handlingssätt skall värderas. Antar man vidare att det endast finns ett ändligt antal utfall som är möjliga vid varje handlingssätt kan sannolikhetsfördelningarna uppfattas som vektorer eller punkter i ett euklideiskt rum. Antalet dimensioner för rummet blir ett mindre än antalet olika utfall som kan inträffa vid något handlingssätt när alla alternativa handlingssätt tas i beaktande. Antalet dimensioner blir ett mindre än det nämnda antalet därför att summan av alla sannolikheterna för de olika utfallen vid varje handlingssätt är lika med 1, varför en sannolikhet kan uppfattas som beroende av de övriga.

Man kan nu tänka sig att det finns en preferensordning inom det nämnda euklideiska rummet sådan att genom varje punkt passerar ett och endast ett indifferenslokus. Därvid gör man det vanliga antagandet om kontinuerliga och transitiva preferenser. Den s. k. »expected utility doctrine» ställer nu en ytterligare restriktion på preferenssystemet genom ett axiomatiskt antagande som kan formuleras på olika sätt. Det vanligaste sättet att formulera axiomet är följande. Ifall två sannolikhetsvektorer A och B är likvärdiga, måste även vektorerna $p \cdot A + (1-p) \cdot C$ och $p \cdot B + (1-p) \cdot C$ vara likvärdiga, där C är en godtycklig tredje sannolikhetsvektor och p är en godtycklig sannolikhet mellan 0 och 1. Likvärdighet för lotterierna A och B implicerar således likvärdighet mellan de lotterier som bildas genom lottdragning med samma sannolikheter mellan lotterierna A respektive B och ett och samma lotteri C. Såsom visas i en följande härledning ställer detta antagande sådana restriktioner på preferensystemet att indifferensloci blir parallella hyperplan.

Eftersom nu preferenssystemet består av parallella hyperplan kan man beräkna på vilket av de parallella hyperplanen en viss punkt ligger genom att beräkna värdet av en linear funktion i de variabler som motsvarar rummets olika dimensioner, dvs. i sannolikheterna för de olika utfallen. Koefficienterna i nämnda linearа funktion är helt enkelt de parallella hyperplanens riktningskoefficienter i de olika dimensionerna. Man kan betrakta dessa riktningskoefficienter som »nyttovärden» av de säkra utfall som de olika dimensionerna motsvarar och värdet av den linearа funktionen som en

matematiskt förväntad »nytta». Därvid har man uppnått slutsatsen att preferensordningen under det tillagda axiomet leder till samma handlande som maximering av en kardinal nyttofunktion skulle göra.[1]

Det bör understrykas att denna teori *inte förutsätter* kardinal nytta, utan att den leder till samma typ av handlande som kardinal nytta skulle göra. Man kan möjligen säga att, ifall detta handlande stämmer med det i verkligheten iakttagna, kardinal nytta enligt vedertagna regler för hypotesbildning är en plausibel hypotes som kan förklara verkligheten. Men det betyder inte att den axiomatiska teorin måste förkastas samtidigt med att man förkastar tanken på en kardinal nytta såsom mätbar psykologisk sensation.

Däremot gäller naturligtvis att hela teorin måste förkastas ifall människors handlande ej skulle stå i överensstämmelse med det som tilläggsaxiomet implicerar. Det kan synas att de försök som gjorts för att testa teorin talar mot denna.

Ett exempel på att människor väljer inkonsistent med axiomen anföres av Markowitz (s. 220 ff.). Det kan lätt konstateras att om man ställes inför följande två valsituationer, så ligger det nära till hands att handla inkonsistent med teorin. Det gäller att dels välja mellan alternativen A och B, dels välja mellan alternativen C och D. Alternativen innebär följande:

A. Att erhålla 1 milj. kr med säkerhet.
B. Att erhålla 5 milj. kr med sannolikheten 0,10
1 milj. kr med sannolikheten 0,89 och
ingenting med sannolikheten 0,01.
C. Att erhålla 1 milj. kr med sannolikheten 0,11 och
ingenting med sannolikheten 0,89.
D. Att erhålla 5 milj. kr med sannolikheten 0,10 och
ingenting med sannolikheten 0,90.

Det ligger nära till hands att föredra A framför B och föredra D framför C. Gör man det väljer man emellertid icke i överensstämmelse med »expected utility»-doktrinen.

I nedanstående figur med triangulära koordinater har punkter motsvarande sannolikhetsfördelningarna A, B, C och D markerats. Enligt »expected utility»-doktrinen skall indifferensloci vara parallella räta linjer. Ifall nu A föredras framför B måste den indifferenskurva vilken passerar genom A vara *flackare* än linjen AB för att B skall hamna till höger om indifferens-

[1] För det sagda finns flera formella bevis. Se v. Neumann–Morgenstern, »The Theory of Games and Economic Behaviour», 1943, J. Marschak, »Rational Behaviour, Uncertain Prospects and Measurable Utility», Econometrica 1950, L. J. Savage, »The Foundations of Statistics», 1954 samt H. M. Markowitz, »Portfolio Selection», 1959.

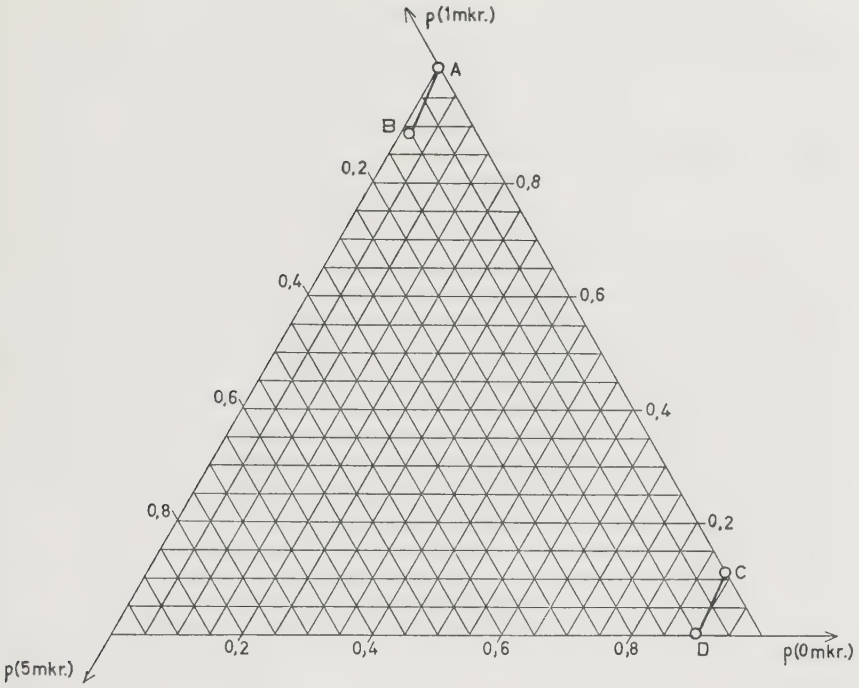


Fig. 11.

kurvan i den sämre delen av planet. Ifall D skall föredras framför C måste på samma sätt den indifferenskurva vilken passerar genom C vara *brantare* än linjen CD för att D skall hamna till vänster om indifferenskurvan i den bättre delen av planet. Emellertid är AB och CD parallella. Härav följer ifall indifferenskurvorna är rätlinjiga att de inte kan vara parallella. »Expected utility»-doktrinen som kräver både parallellitet och linearitet kan därför inte gälla när $A \succ B$ och $C \prec D$.

Emellertid förefaller axiomet i sig plausibelt, varför ett handlande mot detta kan ske på grund av att man inte omedelbart inser de sannolikhetsteoretiska sammanhangen. Skulle så vara fallet är det ej särskilt rimligt att förkasta teorin enbart härför. Teorierna för optimalt handlande förutsätter ju alltid fullständig rationalitet och är därför grova approximationer till verkligheten. Ju mer komplicerade överväganden som förutsätts i teorin, desto sämre blir dess överensstämmelse med verkligheten, men fortfarande representerar teorin på ett idealiserat sätt det verkliga handlandet.

I det följande har »expected utility doctrine» accepterats närmast på grund av de möjligheter som den erbjuder till att analysera portföljproblem.

Förutom de starka antaganden rörande förväntningar och preferenser som redan gjorts skall vi göra ytterligare ett: nämligen det att preferenserna är sådana att endast medelvärden och varianser i förväntningsfördelningarna är relevanta för val mellan alternativa handlingssätt vilkas konsekvenser representeras av olika förväntningsfördelningar. Detta leder till samma resultat som de s. k. kvadratiska nyttofunktionerna. Till följd av att de är så lätta att räkna med har de vunnit en utomordentlig popularitet inom den litteratur som behandlar ekonomiska risksituationer.[1] Av den i detta kapitel följande analysen framgår emellertid att den kombination av förutsättningar som det här gäller leder till ytterst orimliga resultat. Dessa kan undvikas genom förutsättningen att placerarna vid sidan av medelvärde och varians även tar hänsyn till tredje centralmomentet som uttryck för förväntningsfördelningens snedhet. På grund av de orimligheter som uppstår vid kvadratiska nyttofunktioner, skall vi i följande kapitels generalisering till dynamisk planering inte ställa några dylika restriktioner på nyttofunktionens form.[2]

2. Preferensernas karaktär

Fall 1

Låt oss nu antaga att det subjekt vi diskuterar endast behöver veta medelvärden och varianser i de sannolikhetsfördelningar för förmögenhetsvärdet, vilka resulterar av möjliga alternativa placeringsbeslut, för att vara i stånd att klassificera de olika fördelningarna och besluten efter deras

[1] Den viktigaste tillämpningen på portföljvalsproblemet av detta slags teori utgör H. M. Markowitz, »Portfolio Selection», New York 1959, part IV. Hans analys är emellertid rent statisk. En komparativt statisk uppläggning för två tillgångar finner man hos Ira O. Scott, »The Availability Doctrine: Theoretical Underpinnings», The Review of Economic Studies, 1957, samt James Tobin, »Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk», The Review of Economic Studies, 1957. En utbyggnad är den sistnämnde författarens uppsats: James Tobin, »The Theory of Asset Preference» i Frank Hahn (Ed.), »The Theory of Interest Rates» (under utgivning), Proceedings of Conference held at Royaumont in 1962. Ett försök att generalisera till godtyckligt antal tillgångar och att differentiera analysen efter olika typer av ekonomiska subjekt görs i ett tekniskt dokument för värdesäkringskommittén: Ingemar Ståhl, »Risk- och avkastningsförändringars verkningar på portföljsammansättning, sparande och investeringar» (stencil 1962). En generalisering till ett godtyckligt antal tillgångar görs även i O. H. Brownlee and I. O. Scott, »Utility, Liquidity and Debt Management», Econometrica 1963.

[2] Den omedelbart följande diskussionen följer emellertid det traditionella mönstret och bygger på författarens artiklar: Tõnu Puu, »Mikroteori för ett enskilt subjekts optimala förmögenhetssammansättning», Ekonomisk Tidskrift 1962 och 1963.

grader av önskvärdhet. Medelvärdet uppfattas som ett mått på tyngdpunkten i förväntningarna och variansen som ett mått på osäkerheten i detta på visst sätt representativa förväntade värde. Det synes rimligt att högre medelvärde vid oförändrad varians alltid måste anses vara en förbättring. Hur subjektet ställer sig till högre varians vid oförändrat medelvärde är mindre självklart. En variansökning vid oförändrat medelvärde innebär en utbredning av sannolikhetsfördelningen med tyngdpunkten opåverkad så att både mycket låga och mycket höga värden blir sannolikare än tidigare. Huruvida subjektet anser detta innebära en förbättring eller en försämring beror på om han lägger större vikt vid de större chanserna till höga värden eller vid de större riskerna för låga värden. Såsom brukligt i dessa sammanhang skall vi kalla dessa bägge möjligheter riskpreferens respektive riskaversion. I det intermediära fallet där endast medelvärdet men ej variansen spelar någon roll för beslutet säger vi att subjektet är neutral riskvärderare. Vi skall i det följande utgå från att som normalfall riskaversion är rådande.

Antag nu att de två sannolikhetsfördelningarna $f_1(x)$ och $f_2(x)$ är likvärdiga. Detta likvärdighetsomdöme kan fällas på grundval av kännedom om medelvärdena m_1 och m_2 samt varianserna σ_1^2 och σ_2^2. Förutsätt nu att den kombinerade sannolikhetsfördelning som bildas genom lottdragning mellan de bägge fördelningarna är likvärdig med dessa själva. Det synes vara ett i regel ganska rimligt antagande att i det fall då två alternativ verkligen är likvärdiga, vetskapen om att endera skall bli verklighet bör vara likvärdig med full säkerhet om ettdera alternativet.

Det sagda innebär att sannolikhetsfördelningen $p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)$, där $p_1 + p_2 = 1$, är likvärdig med $f_1(x)$ och $f_2(x)$. Medelvärdet i denna kombinerade sannolikhetsfördelning erhålles som

$$m = \int x\{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)\}\,dx = p_1 \int x f_1(x)\,dx + p_2 \int x f_2(x)\,dx$$

eller

$$m = p_1 m_1 + p_2 m_2 \tag{2-1}$$

Likaså erhålles den kombinerade fördelningens varians

$$\sigma^2 = \int x^2\{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x)\}\,dx - m^2 = p_1 \int x^2 f_1(x)\,dx + p_2 \int x^2 f_2(x)\,dx - m^2$$

eller annorlunda uttryckt

$$\sigma^2 + m^2 = p_1(\sigma_1^2 + m_1^2) + p_2(\sigma_2^2 + m_2^2) \tag{2-2}$$

Ur ekvationerna $p_1 + p_2 = 1$ och $m = p_1 m_1 + p_2 m_2$ kan vi lösa ut

$$p_1 = \frac{m_2}{m_2 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1} m$$

$$p_2 = \frac{-m_1}{m_2 - m_1} + \frac{1}{m_2 - m_1} m$$

Insättes dessa värden i ekvation (2-2) erhåller vi

$$\sigma^2 + m^2 = \frac{m_2(\sigma_1^2 + m_1^2) - m_1(\sigma_2^2 + m_2^2)}{m_2 - m_1} + \frac{(\sigma_2^2 + m_2^2) - (\sigma_1^2 + m_1^2)}{m_2 - m_1} m \qquad (2\text{-}3)$$

Det är nu enligt våra förutsättningar så att alla de kombinationer av värden på m och σ^2, vilka satisfierar ekvation (2-3), är likvärdiga med kombinationerna m_1; σ_1^2 och m_2; σ_2^2. Denna ekvation definierar en indifferenskurva i $m\sigma^2$-planet. Det är tydligt att denna, och alla andra indifferenskurvor, måste ha formen $\sigma^2 + m^2 = a + bm$, där a och b har givna värden för varje indifferenskurva.

Låt oss nu vid sidan om den redan härledda indifferenskurvan betrakta ytterligare en. Antag att sannolikhetsfördelningarna $f_1^*(x)$ och $f_2^*(x)$ har sådana kombinationer av medelvärden och varianser att de svarar mot denna nya indifferenskurva. Definiera härnäst sannolikhetsfördelningen $f_v(x)$ så att $f_1^*(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1 - \alpha) \cdot f_v(x)$. Enligt »expected utility»-doktrinens postulat följer nu att $f_2^*(x)$ är likvärdig med $f_1^*(x)$ försåvitt $f_2^*(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1 - \alpha) \cdot f_v(x)$. Vidare gäller ju att även alla sannolikhetsfördelningar av typen

$$p_1 \cdot f_1^*(x) + p_2 \cdot f_2^*(x) = \alpha(p_1 \cdot f_1(x) + p_2 \cdot f_2(x)) + (1 - \alpha) \cdot f_v(x)$$

där $p_1 + p_2 = 1$ skall vara likvärdiga. Upprepad tillämpning av (2-1) och (2-2) ger för medelvärdet och variansen i dessa likvärdiga fördelningar följande uttryck:

$$m = \alpha(p_1 \cdot m_1 + p_2 \cdot m_2) + (1 - \alpha) \cdot m_v \qquad (2\text{-}1\,\text{a})$$

och

$$\sigma^2 + m^2 = \alpha \cdot (p_1(\sigma_1^2 + m_1^2) + p_2(\sigma_2^2 + m_2^2)) + (1 - \alpha) \cdot (\sigma_v^2 + m_v^2) \qquad (2\text{-}2\,\text{a})$$

Villkoret $p_1 + p_2 = 1$ tillika med (2-1 a) låter oss uttrycka αp_1 och αp_2 på följande sätt

$$\alpha \cdot p_1 = \frac{\alpha \cdot m_2 + (1 - \alpha) \cdot m_v}{m_2 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1} \cdot m$$

$$\alpha \cdot p_2 = -\frac{\alpha \cdot m_1 + (1 - \alpha) \cdot m_v}{m_2 - m_1} + \frac{1}{m_2 - m_1} \cdot m$$

Substitution av p_1 och p_2 i (2-2 a) ger sedan ekvationen för den nya indifferenskurvan:

$$\sigma^2 + m^2 = \alpha \cdot \frac{m_2(\sigma_1^2 + m_1^2) - m_1(\sigma_2^2 + m_2^2)}{m_2 - m_1}$$

$$- (1 - \alpha) \cdot \frac{(\sigma_2^2 + m_2^2) - (\sigma_1^2 + m_1^2)}{m_2 - m_1} \cdot m_v + (1 - \alpha) \cdot (\sigma_v^2 + m_v^2)$$

$$+ \frac{(\sigma_2^2 + m_2^2) - (\sigma_1^2 + m_1^2)}{m_2 - m_1} \cdot m \qquad (2\text{-}3\,a)$$

Låter vi a och b vara definierade som förut erhålles $\sigma^2 + m^2 = [\alpha \cdot a - (1 - \alpha) \cdot bm_v + (1 - \alpha) \cdot (\sigma_v^2 + m_v^2)] + b \cdot m$. Denna form kan jämföras med formen för den tidigare härledda indifferenskurvan $\sigma^2 + m^2 = a + b \cdot m$. Tydligen är den konstanta termen det enda värde som varierar mellan olika indifferenskurvor medan koefficienten b har samma värde även för olika indifferenskurvor. Värdet på den konstanta termen i den nya indifferenskurvans ekvation blir högre eller lägre beroende på om $bm_v - (\sigma_v^2 + m_v^2)$ har högre eller lägre värde än a.

Eftersom a antar olika värden för olika indifferenskurvor, kan dess värde tjäna som preferensindex. Än så länge vet vi emellertid inte om ett högt eller lågt värde på a är önskvärt. Löser vi ut a, erhålles $a = -bm + m^2 + \sigma^2$. Härav framgår att värdet på a växer med σ^2. Enligt vad vi förut sagt bör en person med riskaversion minimera a och en person med riskpreferens maximera a. Om vi multiplicerar uttrycket för a med en konstant, g, vilken är negativ vid riskaversion och positiv vid riskpreferens, erhåller vi ett preferensindex som alltid skall maximeras. Vi kan sätta $f = -bg$ och, om vi önskar, lägga till en konstant k. Därvid erhålles en preferens- eller nyttofunktion som det gäller att maximera:

$$\bar{u} = k + fm + g(m^2 + \sigma^2) \qquad (2\text{-}4)$$

Enligt vad vi ovan sagt, är $\partial\bar{u}/\partial m = f + 2gm > 0$ och $\partial\bar{u}/\partial\sigma^2 = g < 0$ vid riskaversion. Därvid är det uppenbart att $\partial\bar{u}/\partial m$ kan göras negativt genom att ett tillräckligt högt värde på m väljes. Det måste alltså ligga den extra restriktionen på nyttofunktionen att $m < -f/2g$.

Den härledda nyttofunktionen hade kunnat erhållas på ett enklare sätt om vi förutsatt att det skulle gälla att maximera matematiska förväntan för en kvadratisk nyttofunktion: $u = k + fx + gx^2$. Matematiska förväntan är $E(u) = k + fE(x) + gE(x^2)$. Eftersom $m = E(x)$ och $\sigma^2 = E(x^2) - m^2$ erhålles samma resultat som förut.

Fall 2

Vi kommer senare att finna att dessa antaganden i vissa fall leder till orimliga resultat. Dessa orimligheter försvinner om subjektets preferenser ej är formulerade endast för medelvärde och varians som argument, utan dessutom fordrar kännedom om sannolikhetsfördelningens tredje centralmoment. Detta moment brukar uttrycka fördelningens snedhet. Det är positivt om sannolikhetsmassan ovanför medelvärdet är utdragen över ett större intervall än nedanför medelvärdet och negativt i motsatt fall. Precis som förut går vi tillväga för att härleda en viss indifferenskurvas ekvation. Eftersom vi nu har ytterligare en dimension måste vi emellertid starta från tre likvärdiga sannolikhetsfördelningar $f_1(x)$, $f_2(x)$ och $f_3(x)$. Medelvärden och varianser betecknas som förut m_1, m_2, m_3 och σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 respektive. Tredjemomenten betecknar vi α_1^3, α_2^3, α_3^3.

Som förut antas lotterier mellan de tre fördelningarna vara likvärdiga med säkerhet för någon av dem. Således är fördelningen $p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + p_3 f_3(x)$ likvärdig med $f_1(x)$, $f_2(x)$ och $f_3(x)$ för alla värden på p_1, p_2 och p_3 vilka uppfyller villkoret $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Den kombinerade fördelningens medelvärde och varians framgår, i analogi till vad vi sett i det tidigare fallet, av följande ekvationer:

$$m = p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 \tag{2-5}$$

$$\sigma^2 + m^2 = (\sigma_1^2 + m_1^2)p_1 + (\sigma_2^2 + m_2^2)p_2 + (\sigma_3^2 + m_3^2)p_3 \tag{2-6}$$

Tredje momentet i den kombinerade fördelningen blir

$$\alpha^3 = \int (x-m)^3 \{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + p_3 f_3(x)\}\, dx$$

$$= \int x^3 \{p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + p_3 f_3(x)\}\, dx - 3m\sigma^2 - m^3$$

$$\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3 = p_1 \int x^3 f_1(x)\, dx + p_2 \int x^3 f_2(x)\, dx + p_3 \int x^3 f_3(x)\, dx$$

Nu är emellertid

$$\alpha_1^3 = \int x^3 f_1(x)\, dx - 3m_1\sigma_1^2 - m_1^3,\ \alpha_2^3 = \int x^3 f_2(x)\, dx - 3m_2\sigma_2^2 - m_2^3$$

och $\alpha_3^3 = \int x^3 f_3(x)\, dx - 3m_3\sigma_3^2 - m_3^3$. Insättes värdena på de tre integralerna i uttrycket för α^3 ovan erhåller vi:

$$\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3 = p_1(\alpha_1^3 + 3m_1\sigma_1^2 + m_1^3)$$
$$+ p_2(\alpha_2^3 + 3m_2\sigma_2^2 + m_2^3) + p_3(\alpha_3^3 + 3m_3\sigma_3^2 + m_3^3) \tag{2-7}$$

Härnäst löser vi ut värdena på p_1, p_2 och p_3 ur ekvationssystemet som bildas av $p_1+p_2+p_3=1$, (2-5) och (2-6). Systemet lyder:

$$\begin{cases} p_1 + \quad p_2 + \quad p_3 = 1 \\ m_1 p_1 + \quad m_2 p_2 + \quad m_3 p_3 = m \\ (\sigma_1^2+m_1^2)p_1 + (\sigma_2^2+m_2^2)p_2 + (\sigma_3^2+m_3^2)p_3 = \sigma^2+m^2 \end{cases}$$

Definiera determinanten D på följande sätt

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ (\sigma_1^2+m_1^2) & (\sigma_2^2+m_2^2) & (\sigma_3^2+m_3^2) \end{vmatrix}$$

och låt D_{ij} beteckna co-faktorn till elementet på den i:te raden och den j:te kolumnen i denna determinant. Med dessa beteckningar blir

$$p_1 = \frac{D_{11}}{D} + \frac{D_{21}}{D} m + \frac{D_{31}}{D}(\sigma^2+m^2)$$

$$p_2 = \frac{D_{12}}{D} + \frac{D_{22}}{D} m + \frac{D_{32}}{D}(\sigma^2+m^2)$$

$$p_3 = \frac{D_{13}}{D} + \frac{D_{23}}{D} m + \frac{D_{33}}{D}(\sigma^2+m^2)$$

Härvid bör observeras att D och alla dess co-faktorer är konstanter som beror på m_1, m_2, m_3, och σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2. Insättes värdena på p_1, p_2, p_3 i ekvation (2-7) erhåller vi

$$\begin{aligned} &\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3 \\ &= \frac{(\alpha_1^3+3m_1\sigma_1^2+m_1^3)D_{11} + (\alpha_2^3+3m_2\sigma_2^2+m_2^3)D_{12} + (\alpha_3^3+3m_3\sigma_3^2+m_3^3)D_{13}}{D} \\ &+ \frac{(\alpha_1^3+3m_1\sigma_1^2+m_1^3)D_{21} + (\alpha_2^3+3m_2\sigma_2^2+m_2^3)D_{22} + (\alpha_3^3+3m_3\sigma_3^2+m_3^3)D_{23}}{D} m \\ &+ \frac{(\alpha_1^3+3m_1\sigma_1^2+m_1^3)D_{31} + (\alpha_2^3+3m_2\sigma_2^2+m_2^3)D_{32} + (\alpha_3^3+3m_3\sigma_3^2+m_3^3)D_{33}}{D} \\ &\qquad \times(\sigma^2+m^2) \qquad (2\text{-}8) \end{aligned}$$

Alla tre bråken är konstanter och (2-8) anger ekvationen för ett indif-

ferenslocus. Analogt till vad som sagts i föregående fall blir nyttofunktionens form

$$\bar{u} = k + fm + g(\sigma^2 + m^2) + h(\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3) \qquad (2\text{-}9)$$

Liksom i föregående fall hade vi kunnat erhålla denna funktion direkt genom att förutsätta maximering av matematiska förväntan för den kubiska nyttofunktionen $u = k + fx + gx^2 + hx^3$.

Även för den kubiska nyttofunktionen skall vi antaga att vissa restriktioner gäller. Vi förutsätter att högre medelvärde och högre snedhet alltid innebär förbättringar. Alltså

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial m} = f + 2gm + 3h(m^2 + \sigma^2) > 0 \text{ och } \frac{\partial \bar{u}}{\partial a^3} = h > 0$$

Liksom förut kan vi skilja mellan riskaversion och riskpreferens alltefter tecknet på $\partial \bar{u}/\partial \sigma^2 = g + 3hm$. Vid riskaversion är derivatan negativ och vid riskpreferens är den positiv. Skulle vi anta att $g < 0$, innebar det att riskaversionen vore stor vid låga värden på m för att avtaga med växande m och slutligen övergå i riskpreferens. Detta synes vara ett mycket rimligt antagande. När förmögenhetens aktuella värde, och således i regel även dess genomsnittligt förväntade framtida värde är lågt, är subjektet angeläget att placera förmögenheten säkert, medan han troligen blir mera villig att ta risker ju förmögnare han är.

Fall 3

Vi skall nu återgå till våra tidigare enkla förutsättningar att subjektet handlar utan hänsyn till moment av högre ordning än andra. I stället för vi in en annan komplikation, nämligen den att preferenserna är formulerade för två olika perioder. Antag alltså att vi har fem bivariata sannolikhetsfördelningar som är likvärdiga. De betecknas $f_i(c_1, c_2)$ med $i = 1, 2, \ldots, 5$. Den summa som är disponibel för konsumtion under första perioden betecknas c_1 och den summa som är disponibel under andra perioden betecknas c_2. Bägge antas vara osäkra till en början. Omdömet om likvärdighet grundar sig på kännedom om respektive perioders medelvärden m_{1i} och m_{2i}, deras varianser σ_{1i}^2 och σ_{2i}^2 och korrelationskoefficienten mellan perioderna R_i. Var och en av de fem bivariata fördelningarna representeras för subjektets preferenser fullständigt av fem storheter, nämligen de bägge periodernas medelvärden som anger hur stora de för konsumtion tillgängliga beloppen i genomsnitt kan förväntas vara, deras varianser som anger osäkerheten i respektive genomsnittsmått och slutligen korrelationskoefficienten vilken säger något om i hur hög grad höga respektive låga värden under den ena

perioden tenderar att uppträda tillsammans med höga respektive låga värden under den andra perioden. Anledningen till att vi startar från fem likvärdiga fördelningar torde nu vara uppenbar, ty det gäller att härleda indifferensloci i fem dimensioner.

Låt oss nu införa några förkortade symboler; $A_{1i}=m_{1i}$, $A_{2i}=m_{2i}$ betecknar medelvärdet eller matematiska förväntan för konsumtionen under den första respektive den andra perioden; $B_{1i}=m_{1i}^2+\sigma_{1i}^2$, $B_{2i}=m_{2i}^2+\sigma_{2i}^2$ betecknar matematiska förväntan för kvadraten på konsumtionsvärdet under den första respektive den andra perioden; $C_i=m_{1i}m_{2i}+R_i\sigma_{1i}\sigma_{2i}$ slutligen betecknar matematiska förväntan för produkten av de bägge periodernas konsumtionsvärden.

Vi vet att eftersom fördelningarna $f_i(c_1,c_2)$ är likvärdiga för $i=1,2,...,5$, måste även $\Sigma_{i=1}^5 p_i f_i(c_1,c_2)$ vara likvärdig med dessa under förutsättning att $\Sigma_{i=1}^5 p_i=1$. I direkt analogi till de förut behandlade fallen erhålles medelvärden och varianser för de bägge perioderna beräknade på den kombinerade fördelningen.

$$\sum_{i=1}^{5} A_{1i}p_i = m_1 \tag{2-10}$$

$$\sum_{i=1}^{5} A_{2i}p_i = m_2 \tag{2-11}$$

$$\sum_{i=1}^{5} B_{1i}p_i = m_1^2+\sigma_1^2 \tag{2-12}$$

$$\sum_{i=1}^{5} B_{2i}p_i = m_2^2+\sigma_2^2 \tag{2-13}$$

Observera att fotindex på medelvärden och varianser, när endast ett index förekommer, representerar period och ej, i motsats till de bägge tidigare fallen, numret på någon av de fem likvärdiga sannolikhetsfördelningarna.

Den kombinerade sannolikhetsfördelningens kovarians definieras som

$$\iint c_1c_2\sum_{i=1}^{5} p_i f_i(c_1,c_2)\,dc_1dc_2 - m_1m_2 = \sum_{i=1}^{5} p_i \iint c_1c_2 f_i(c_1,c_2)\,dc_1dc_2 - m_1m_2$$

Kovariansen för den kombinerade fördelningen kan även skrivas $R\sigma_1R\sigma_2$. Vidare kan kovarianserna i de fem likvärdiga fördelningarna skrivas $R_i\sigma_{1i}\sigma_{2i}=\iint c_1c_2f_i(c_1,c_2)\,dc_1dc_2-m_{1i}m_{2i}$. Användes dessa informationer erhåller vi:

$$m_1m_2+R\sigma_1\sigma_2=\sum_{i=1}^{5} p_i(m_{1i}m_{2i}+R_i\sigma_{1i}\sigma_{2i})$$

eller med insättning av de tidigare införda förkortande symbolerna:

$$\sum_{i=1}^{5} C_i p_i = m_1 m_2 + R\sigma_1\sigma_2 \tag{2-14}$$

Vi kan nu använda $\sum p_i = 1$ och ekvationerna (2-10)–(2-13) för att lösa ut p_i. Systemet blir:

$$\begin{cases} \sum p_i = 1 \\ \sum A_{1i} p_i = m_1 \\ \sum A_{2i} p_i = m_2 \\ \sum B_{1i} p_i = m_1^2 + \sigma_1^2 \\ \sum B_{2i} p_i = m_2^2 + \sigma_2^2 \end{cases}$$

Systemets lösning blir:

$$p_i = \frac{D_{1i}}{D} + \frac{D_{2i}}{D} m_1 + \frac{D_{3i}}{D} m_2 + \frac{D_{4i}}{D}(m_1^2 + \sigma_1^2) + \frac{D_{5i}}{D}(m_2^2 + \sigma_2^2)$$

där:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} \end{vmatrix}$$

Insättes lösningarna för p_i i ekvation (2-14) erhåller vi slutligen:

$$(m_1 m_2 + R\sigma_1\sigma_2) = \frac{\sum C_i D_{1i}}{D} + \frac{\sum C_i D_{2i}}{D} m_1 + \frac{\sum C_i D_{3i}}{D} m_2$$

$$+ \frac{\sum C_i D_{4i}}{D}(m_1^2 + \sigma_1^2) + \frac{\sum C_i D_{5i}}{D}(m_2^2 + \sigma_2^2) \tag{2-15}$$

Detta är ekvationen för ett indifferenslocus. Nyttofunktionen kan därför skrivas

$$\bar{u} = k + f_1 m_1 + f_2 m_2 + g_{11}(m_1^2 + \sigma_1^2) + 2g_{12}(m_1 m_2 - R\sigma_1\sigma_2) + g_{22}(m_2^2 + \sigma_2^2) \tag{2-16}$$

Detta resultat hade även kunnat erhållas direkt genom att förutsätta maximering av matematiska förväntan för följande nyttofunktion $u = k + f_1 c_1 + f_2 c_2 + g_{11} c_1^2 + 2g_{12} c_1 c_2 + g_{22} c_2^2$. Ett specialfall av (2-16) erhåller vi om vi förutsätter att konsumtionen under den första perioden är en handlings-

parameter och endast den andra periodens konsumtion är en osäker förväntningsvariabel. Då är $m_1 = c_1, \sigma_1^2 = 0$. Eftersom vi inte längre riskerar någon hopblandning kan vi nu släppa fotindex för den andra perioden. Alltså $m_2 = m$ och $\sigma_2^2 = \sigma^2$. Härvid erhålles

$$\bar{u} = k + f_1 c_1 + f_2 m + g_{11} c_1^2 + 2 g_{12} c_1 m + g_{22}(m^2 + \sigma^2) \qquad (2\text{-}17)$$

Appendix

En enkel härledning av »expected utility»-doktrinen

Vi skall i det följande ge en enkel härledning av »expected-utility»-doktrinen vilken något avviker från den vanliga. Härledningen bygger på följande postulat.

1) I ett lotteri med ändligt antal möjliga utfall, betecknade $[x_1, ..., x_m, x_n]$, råder sannolikheterna $[p_1, ..., p_m, p_n]$ för de olika utfallen. Eftersom $p_n = 1 - p_1 - ... - p_m$, är sannolikhetsfördelningarna fullständigt bestämda genom vektorerna $\mathbf{p} = [p_1, ..., p_m]$. Mellan varje par av vektorer $\mathbf{p}^{(1)}$ och $\mathbf{p}^{(2)}$ — inom den del Ω av det m-dimensionella euklideiska rummet där $p_i \geqslant 0$ för $i = 1, ..., m$ och $\sum_{i=1}^{m} p_i \leqslant 1$ — antas råda sådana relationer att ett och endast ett av villkoren $\mathbf{p}^{(1)} \succ \mathbf{p}^{(2)}$, $\mathbf{p}^{(1)} \prec \mathbf{p}^{(2)}$ och $\mathbf{p}^{(1)} \sim \mathbf{p}^{(2)}$ gäller. Dvs. antingen föredras $\mathbf{p}^{(1)}$ framför $\mathbf{p}^{(2)}$, eller föredras $\mathbf{p}^{(2)}$ framför $\mathbf{p}^{(1)}$, eller hålles $\mathbf{p}^{(1)}$ pch $\mathbf{p}^{(2)}$ likvärdiga. Preferens- och indifferensrelationerna antas även vara transitiva så att $\mathbf{p}^{(1)} \succ \mathbf{p}^{(2)} \succ \mathbf{p}^{(3)}$ implicerar $\mathbf{p}^{(1)} \succ \mathbf{p}^{(3)}$; och så att $\mathbf{p}^{(1)} \sim \mathbf{p}^{(2)} \sim \mathbf{p}^{(3)}$ implicerar $\mathbf{p}^{(1)} \sim \mathbf{p}^{(3)}$. För att vi skall kunna tala om en preferensordning bör det även gälla att ej alla $\mathbf{p} \in \Omega$ är likvärdiga. Hittills har ingenting utöver vanliga ordinala preferensantaganden införts. Preferenserna antas kunna representeras med en kontinuerlig nyttofunktion $U[\mathbf{p}]$. Härför krävs — såsom Debreu har visat — det speciella antagandet att preferensklasserna skall vara öppna och indifferensklasserna slutna.[1] I så fall kan en »one-to-one correspondence» införas mellan indifferensklasserna och de reella talen i ett slutet intervall, vilket ju betyder detsamma som att man representerar preferenserna med en kontinuerlig nyttofunktion. Det gäller nu att välja $\mathbf{p}$ så bland de möjliga alternativen att $U[\mathbf{p}]$ maximeras, något som ju den allmänna valhandlingsteorin antar. Av speciellt intresse är rangordningen mellan de säkra alternativen $\mathbf{e}_i = [p_1, ..., p_m]$ för $i = 1, ..., m$ — där $p_i = 1$ och $p_j = 0$ för $j \neq i$ — samt $\mathbf{e}_n = [p_1, ..., p_m]$ — där $p_j = 0$ för $j = 1, ..., m$. Numreringen av alternativen antas ha blivit gjord så att värdet på $U[\mathbf{e}_i]$ ej

[1] Se Gerard Debreu, »Theory of Value», New York 1959, s. 55 ff. samt Peter Newman and Ronald Read, »Representation Problems for Preference Orderings», The Journal of Economic Behaviour, 1961, s. 149 ff.

faller när i växer — så att $U[\mathbf{e}_i]$ är det lägsta värdet och $U[\mathbf{e}_n]$ det högsta värdet för nyttofunktionen. I dessa säkra fall kan vi skriva $U[\mathbf{e}_i] = U(x_i)$ eftersom det gäller nyttan av det i:te utfallet vid säkerhet.

2) Utöver dessa allmänna postulat skall vi införa några speciella. Vi antar att det finns åtminstone en riskfri ekvivalent — betecknad x — till varje godtycklig vektor $\mathbf{p}$ sådan att $U(\bar{x}) = U[\mathbf{p}]$. Observera att $\bar{x}$ kan vara ett av de i det osäkra prospektet ingående alternativen $x_1, \ldots, x_n$, men ej behöver vara det. Vidare gäller att det kan finnas flera säkra alternativ som är likvärdiga med ett visst osäkert prospekt — dvs. flera riskfria ekvivalenter till detta. Det väsentliga är att var och en av dessa riskfria ekvivalenter delar de säkra utfallen $x_1, \ldots, x_n$ i två klasser — dvs. sådana som när de inträffar med säkerhet är sämre än $\bar{x}$ och sådana som är bättre. Den riskfria ekvivalenten kan självfallet ej vara sämre än x_1 eller bättre än x_n.

Vi antar nu att det finns en och endast en sannolikhet k mellan 0 och 1 som är sådan att — för ett visst i och ett visst j — $U[k \cdot \mathbf{e}_i + (1-k) \cdot \mathbf{e}_j] = U(\bar{x})$ närhelst $U[\mathbf{e}_i] < U(\bar{x}) < U[\mathbf{e}_j]$ gäller. Det betyder att ifall $\bar{x}$ under full säkerhet anses vara bättre än x_i men sämre än x_j, kan vi alltid finna ett och endast ett lotteri mellan x_i och x_j som är precis likvärdigt med ett säkert $\bar{x}$. Speciellt betyder det sagda att man för varje sannolikhetsvektor $\mathbf{p}$ — med den riskfria ekvivalenten $\bar{x}$ — kan finna ett lotteri mellan de enda alternativen x_1 och x_n som är likvärdigt med $\mathbf{p}$ och $\bar{x}$. Matematiskt uttryckt finnes ett $0 \leqslant k \leqslant 1$ sådant att $U[k \cdot \mathbf{e}_1 + (1-k)\,\mathbf{e}_n] = U(\bar{x}) = U[\mathbf{p}]$ för varje godtyckligt $\mathbf{p} \in \Omega$. Tydligt måste det gälla att nyttan växer om och endast om k — dvs. sannolikheten för det lägsta utfallet i vektorn $[k \cdot \mathbf{e}_1 + (1-k)\,\mathbf{e}_n]$ — faller.

3) Som ett ytterligare postulat förutsättes att $\mathbf{p}^{(1)} \sim \mathbf{p}^{(2)}$ implicerar $[k \cdot \mathbf{p}^{(1)} + (1-k) \cdot \mathbf{p}^{(3)}] \sim [k \cdot \mathbf{p}^{(2)} + (1-k) \cdot \mathbf{p}^{(3)}]$ för alla $\mathbf{p}^{(3)} \in \Omega$ och alla $0 \leqslant k \leqslant 1$. Av postulatet erhålles ett intressant specialfall när vi sätter $\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)}$. Därvid blir $[k \cdot \mathbf{p}^{(1)} + (1-k) \cdot \mathbf{p}^{(2)}] \sim [k \cdot \mathbf{p}^{(2)} + (1-k) \cdot \mathbf{p}^{(2)}]$. Högra ledet i likvärdighetsrelationen ger emellertid vektorn $\mathbf{p}^{(2)}$ själv för alla $0 \leqslant k \leqslant 1$, varför vi erhåller slutsatsen att $\mathbf{p}^{(1)} \sim \mathbf{p}^{(2)}$ implicerar $\mathbf{p}^{(1)} \sim [k \cdot \mathbf{p}^{(1)} + (1-k) \cdot \mathbf{p}^{(2)}] \sim \mathbf{p}^{(2)}$ för alla $0 \leqslant k \leqslant 1$.

Låt oss nu betrakta ett godtyckligt indifferenslocus inom Ω. Det första problemet gäller hur många i inskränkt mening lineärt oberoende vektorer $\mathbf{p}$ det finns inom detta indifferenslocus. Lineärt oberoende i inskränkt mening bland ett antal vektorer betyder därvid att ingen av vektorerna kan uttryckas som en sådan lineär kombination av de övriga att summan av kombinationens koefficienter har värdet ett. Ehuru lineärt oberoende i denna inskränkta mening föreligger i ett visst fall — kan det tänkas att lineärt oberoende ändå inte är för handen i den mening som begreppet allmänt brukar ha. Detta inträffar när en vektor visserligen kan uttryckas som en

lineär kombination av de övriga, men koefficientsumman ej är lika med ett. Först finner vi lätt att antalet i inskränkt mening lineärt oberoende vektorer ej kan vara större än m. Ty enligt postulat 3) blir alla sådana lineära kombinationer av de likvärdiga vektorerna där summan av koefficienterna är lika med ett likvärdiga med dessa vektorer själva. Men om det finns $(m+1)$ i sagda mening lineärt oberoende vektorer inom nämnda indifferenslocus kan vi genom sådana lineära kombinationer generera hela det m-dimensionella rummet och sålunda även Ω. Följaktligen måste hela Ω i så fall utgöra ett enda indifferenslocus. Ovan under 1) har vi emellertid antagit att så ej är fallet.

Vi kan också se att det måste finnas åtminstone m sinsemellan lineärt oberoende vektorer inom Ω vilka är likvärdiga med en godtycklig sannolikhetsvektor $\mathbf{p}$. Denna vektor har en riskfri ekvivalent betecknad $\bar{x}$. Vi skall nu finna precis m med $\bar{x}$ likvärdiga och lineärt oberoende sannolikhetsvektorer.

Antag att $\bar{x}$ inte är likvärdigt med något av utfallen $x_1, \ldots, x_n$. Enligt 2) ovan kan vi finna sannolikhetsvektorer med endast två möjliga utfall — vilka är likvärdiga med $\bar{x}$ — under förutsättning att det bästa av utfallen under säkerhet är bättre än och det sämsta av utfallen är sämre än $\bar{x}$. Således kan vi kombinera det sämsta utfallet x_1 med vart och ett av de utfall som är bättre än $\bar{x}$; och det bästa utfallet x_n med vart och ett av de utfall som är sämre än $\bar{x}$. Antalet på detta sätt erhållna vektorer är $(m+1)$. Emellertid har vi genom denna procedur räknat den vektor dubbelt som innebär en kombination av det bästa och det sämsta alternativet. Följaktligen har vi m olika vektorer som är likvärdiga med $\bar{x}$ och $\mathbf{p}$. Dessa måste vara lineärt oberoende, ty endast hela uppsättningen av m vektorer är sådan att för var en av de m komponenterna åtminstone någon vektor har ett från 0 skilt värde.

Det bör observeras att dessa vektorer är lineärt oberoende i den allmänna betydelsen att ingen av dem kan uttryckas som lineär kombination av de övriga. Härav följer naturligtvis att de även är lineärt oberoende i den inskränkta betydelsen — ty finns det ingen lineär kombination alls varigenom en vektor kan uttryckas i de övriga, så finns ju heller ingen lineär kombination av den speciella form där koefficientsumman har ett visst värde.

Skulle $\bar{x}$ åter vara likvärdigt med något av $x_1, \ldots, x_n$ kommer antalet på detta sätt erhållna vektorer med två möjliga utfall att vara $(m-1)$. Härtill kan vi emellertid lägga den vektor som svarar mot det med $\bar{x}$ likvärdiga säkra utfallet. Eftersom detta utfall ej ingår i någon av vektorerna med två utfall kan den sålunda erhållna vektorn med ett enda säkert utfall ej vara någon lineär kombination av de övriga — sålunda kan man även i detta fall

visa att åtminstone m linearт oberoende sannolikhetsvektorer måste finnas i varje indifferenslocus.

Då alltså indifferensloci är linearа kombinationer med koefficientsumman 1 av vektorer bland vilka det i inskränkt mening finns högst m och åtminstone m — alltså precis m — linearт oberoende vektorer, kan vi säga att indifferensloci är $(m-1)$: dimensionella hyperplan inom Ω. Vi skall nu härleda ekvationen för ett sådant hyperplan.

De m i inskränkt mening linearт oberoende sannolikhetsvektorerna betecknas $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(m)}$. Varje sannolikhetsvektor inom ifrågavarande indifferenslocus kan då i enlighet med det sagda skrivas

$$\mathbf{p} = \alpha_1 \mathbf{p}^{(1)} + \ldots + \alpha_m \mathbf{p}^{(m)} \tag{1}$$

där $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$. Detta ekvationssystem kan inverteras så att $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ explicit utläsas som linearа uttryck i $\mathbf{p}$:s komponenter $p_1, \ldots, p_m$ vid givna vektorer $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(m)}$. Härför definieras determinanten

$$D = \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \ldots & p_1^{(m)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & \ldots & p_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_m^{(1)} & p_m^{(2)} & \ldots & p_m^{(m)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

där varje kolumn innehåller en av de linearт oberoende sannolikhetsvektorerna. Eftersom kolumnerna enligt vad vi sett även i allmän mening är linearт oberoende blir $D \neq 0$ och vi kan enligt Cramers regel skriva:[1]

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j^{(i)} \cdot p_j}{D} \quad \text{för} \quad i = 1, \ldots, m \tag{3}$$

Eftersom emellertid $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ kan vi i detta villkor substituera uttrycken för α_i, varigenom erhålles ekvationen

$$A_1 \cdot p_1 + \ldots + A_m \cdot p_m = 1 \tag{4}$$

där

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{D_j^{(i)}}{D} \quad \text{för} \quad j = 1, \ldots, m \tag{5}$$

Ekvationen för ett visst indifferenslcous är således ett hyperplan med ekvationen $A_1 \cdot p_1 + \ldots + A_m \cdot p_m = 1$. Vi har nu fullt utnyttjat den del av

[1] Se G. Shilov, »An Introduction to the Theory of Linear Spaces», Englewood Cliffs 1961, Chapt. 3.

postulat 3) vilken avser ett indifferenslocus. Det gäller härnäst att undersöka hur två godtyckliga indifferensloci förhåller sig till varandra. Betrakta det indifferenslocus för vilket vi just har härlett ekvationen $\sum_{i=1}^{m} A_i \cdot p_i = 1$ och ett annat fördelaktigare locus. I enlighet med postulat 2) kan vi finna en sådan vektor på nämnda fördelaktigare locus som innebär ett lotteri mellan å ena sidan vektorn $\mathbf{e}_n$ — dvs. det n:te och bästa utfallet vid säkerhet — och å den andra exempelvis vektorn $\mathbf{p}^{(1)}$ bland de m lineärt oberoende vektorerna inom det locus som redan härletts. Av postulat 3) i dess generella form följer nu att alla vektorerna $[k \cdot \mathbf{p}^{(1)} + (1-k) \cdot \mathbf{e}_n], \ldots, [k \cdot \mathbf{p}^{(m)} + (1-k) \cdot \mathbf{e}_n]$ ligger på det bättre av de bägge diskuterade indifferensloci så snart en av dem gör det.

Det följer också av oberoendet i inskränkt mening mellan $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(m)}$ inom det bättre av indifferensloci att de nyss härledda vektorerna på det sämre av dem är lineärt oberoende i samma mening.

Eftersom det nu gäller att $\mathbf{e}_n = [0, \ldots, 0]$ kan de sistnämnda vektorerna skrivas $k \cdot \mathbf{p}^{(1)}, \ldots, k \cdot \mathbf{p}^{(m)}$. Dessa är likvärdiga och i inskränkt mening lineärt oberoende. Alla vektorer inom det bättre av de jämförda indifferensloci kan följaktligen uttryckas som lineära kombinationer av $k \cdot \mathbf{p}^{(1)}, \ldots, k \cdot \mathbf{p}^{(m)}$, dvs. som

$$\mathbf{p} = \alpha_1 \cdot k \cdot \mathbf{p}^{(1)} + \ldots + \alpha_m \cdot k \cdot \mathbf{p}^{(m)} \tag{1a}$$

där $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$. Liksom förut kan vi genom Cramers regel — då ju $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(m)}$ är lineärt oberoende vektorer — lösa ut $\alpha_1 \ldots, \alpha_m$ uttryckta i $\mathbf{p}$:s komponenter $p_1, \ldots, p_m$. Detta ger

$$k \cdot \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j^{(i)} \cdot p_j}{D} \quad \text{för} \quad i = 1, \ldots, m \tag{3a}$$

Eftersom emellertid $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$ erhålles

$$A_1 \cdot p_1 + \ldots + A_m \cdot p_m = k \tag{4a}$$

där som förut

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{D_j^{(i)}}{D} \quad \text{för} \quad j = 1, \ldots, m \tag{5}$$

som synes följer av postulat 3) inte bara att indifferensloci skall vara lineära — utan även att de skall vara parallella så att varje indifferenslocus kan skrivas i formen (4 a) där endast k varierar mellan olika indifferensloci, men där $A_1, \ldots, A_m$ gäller för samtliga loci så snart ekvation (4) är uppfylld för ett locus.

Det står oss nu fritt att låta koefficienterna $A_1, ..., A_m$ gälla för det sämsta av alla indifferensloci. Detta locus omfattar endast en vektor $\mathbf{p} = \mathbf{e}_1$ där $p_1 = 1$ och $p_2 = ... = p_n = 0$.[1] Eftersom ekvation (4) skall gälla för dessa värden på $p_1, ..., p_n$ erhålles $A_1 = 1$.

Låt oss nu med $A_1, ..., A_m$ sålunda bestämda uppsöka den sannolikhetsvektor — på ett godtyckligt valt indifferenslocus — som enligt 2) ovan endast innebär ett lotteri mellan det sämsta värdet x_1 och det bästa värdet x_n. Värdet på p_1 får vi ur ekvationen (4 a) genom att sätta $p_2 = ... = p_m = 0$ varvid $p_1 = k$ erhålles. Naturligtvis blir sedan $p_n = 1 - k$. Enligt vad vi har sagt gäller för dylika lotterier mellan endast det bästa och det sämsta alternativet att maximera sannolikheten p_n och minimera sannolikheten p_1. Med andra ord skall man söka maximum för $1 - k$.

Nu är $1 = p_1 + ... + p_n$ och $k = A_1 p_1 + ... + A_m p_m$. Vad som skall maximeras är således det lineära uttrycket

$$(1 - A_1) p_1 + ... + (1 - A_m) p_m + p_n = U[\mathbf{p}] \tag{6}$$

vilket följaktligen självt kan uppfattas som nyttoindex. Eftersom vi ser att $U(x_i) = U[\mathbf{e}_i] = (1 - A_i)$ för $i = 1, ..., m$; och att $U(x_n) = U[\mathbf{e}_n] = 1$, kan vi skriva

$$U[\mathbf{p}] = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) \cdot p_i \tag{7}$$

varvid »expected utility»-doktrinen är härledd. Vi har under härledningen valt den speciella form på nyttofunktionen där $U(x_1) = 1 - A_1 = 0$ och där $U(x_n) = 1$. Som bekant kan emellertid alla lineära transformationer av denna nyttofunktion, där nollpunkt och enhet på nyttoskalan är godtyckligt valda, representera samma preferenssystem.

Det bör observeras att diskussionen avsiktligt har hållits så allmän att det ej har angivits vad utfallen $x_1, ..., x_n$ har för karaktär. Det kan tänkas att de utgör en sekvens av i värde stigande tal. Det kan naturligtvis även vara så att utfallen själva är vektorer av värden. Härledningen gäller även för sådana fall.

---

[1] Det bästa och det sämsta av alla indifferensloci utgör undantag från regeln att det finns m i inskränkt mening lineärt oberoende vektorer inom varje indifferenslocus — beroende på att de endast innehåller en vektor vardera representerande det bästa och det sämsta utfallet vid säkerhet.

3. Optimal fördelning av en given förmögenhet på två tillgångar

a) *Om preferensordningen i q_1q_2-planet och restriktionerna för de tillgångskvantiteter som kan väljas*

Vi antar nu att subjektet handlar så att det maximerar nyttofunktionen

$$\bar{u} = k + fm + g(m^2 + \sigma^2) \tag{3-1}$$

där $f + 2gm > 0$ och under förutsättning av riskaversion $g < 0$. Detta förutsätter i sin tur att $f > 0$. Vi har två tillgångar, vilkas kvantiteter betecknas q_1 och q_2. Medelvärden och varianser för det framtida värdet per enhet av tillgångarna betecknas m_1, m_2 och σ_1^2, σ_2^2, under det att korrelationskoefficienten mellan deras framtida värden betecknas R. Hela förmögenhetens framtida medelvärde och varians betecknas m respektive σ^2. Med dessa beteckningar blir

$$m = m_1 q_1 + m_2 q_2 \tag{3-2}$$

$$m^2 = m_1^2 q_1^2 + 2m_1 m_2 q_1 q_2 + m_2^2 q_2^2 \tag{3-3}$$

och

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 q_1^2 + 2R\sigma_1\sigma_2 q_1 q_2 + \sigma_2^2 q_2^2 \tag{3-4}$$

För att i fortsättningen kunna skriva mera komprimerat inför vi följande symboler

$$A_1 = m_1 \qquad A_2 = m_2$$

$$B_{11} = (m_1^2 + \sigma_1^2) \qquad B_{22} = (m_2^2 + \sigma_2^2)$$

$$B_{12} = (m_1 m_2 + R\sigma_1\sigma_2)$$

Observera att A_1, A_2 betecknar matematiska förväntan för värdet per enhet av tillgångarna; att B_{11}, B_{22} betecknar matematiska förväntan för kvadraterna på dessa värden; och att B_{12} betecknar matematiska förväntan för produkten av tillgångarnas värden. Substitueras (3-2), (3-3) och (3-4) i ekvation (3-1) erhålles med utnyttjande av de införda förkortningssymbolerna

$$\bar{u} = k + fA_1 q_1 + fA_2 q_2 + gB_{11} q_1^2 + 2gB_{12} q_1 q_2 + gB_{22} q_2^2 \tag{3-5}$$

Därmed har vi erhållit en nyttofunktion skriven i mängderna av tillgångar q_1 och q_2. Hålles $\bar{u}$ konstant erhåller vi en implicit funktion mellan q_1 och q_2 som representerar ett indifferenslocus.

Ekvationen för detta indifferenslocus är den generella ekvationen för ett kägelsnitt. Enligt teorin för kägelsnitt är snittet en ellips om $g^2 B_{11} B_{22} -$

$g^2B_{12}^2>0$; en hyperbel vid omvänt olikhetstecken. Sätt nu in värdena på B_{11}, B_{12} och B_{22} i uttrycket $B_{11}B_{22}-B_{12}^2$ och utveckla produkterna. Därvid erhålles

$$\begin{aligned} B_{11}B_{22}-B_{12}^2 &= m_1^2m_2^2+m_1^2\sigma_2^2+m_2^2\sigma_1^2+\sigma_1^2\sigma_2^2 \\ &\quad -m_1^2m_2^2-2Rm_1m_2\sigma_1\sigma_2-R^2\sigma_1^2\sigma_2^2 \\ &= m_1^2\sigma_2^2+m_2^2\sigma_1^2+\sigma_1^2\sigma_2^2-2Rm_1m_2\sigma_1\sigma_2-R^2\sigma_1^2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

Uppenbart är att eftersom definitionsmässigt $-1\leqslant R\leqslant 1$ måste det gälla att $-2Rm_1m_2\sigma_1\sigma_2-R^2\sigma_1^2\sigma_2^2\geqslant -2m_1m_2\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^2\sigma_2^2$. Likheten gäller om $R=1$, medan olikheten gäller i alla andra fall. Det betyder att

$$B_{11}B_{22}-B_{12}^2\geqslant m_1^2\sigma_2^2-2m_1m_2\sigma_1\sigma_2+m_2^2\sigma_1^2=(m_1\sigma_2-m_2\sigma_1)^2\geqslant 0$$

Vi vet således att $g^2B_{11}B_{22}-g^2B_{12}^2\geqslant 0$. Likheten gäller under förutsättning att dels $R=1$ och dels $\sigma_1/m_1=\sigma_2/m_2$. I övrigt gäller olikheten. Detta innebär att i regel indifferensloci är ellipser i $q_1\,q_2$-planet. Ett undantag utgör det fall då tillgångarnas värden är fullständigt korrelerade och har lika variationskoefficienter. Då blir kägelsnittet en parabel. Hyperbolisk form kan det däremot ej ha.[1]

Genom att variera värdet på $\bar{u}$ erhåller vi en skara likformiga ellipser med gemensamt centrum. Drar vi en rät linje genom detta centrum, skäres varje ellips på två ställen. I alla skärningspunkter utmed en sådan rät linje har ellipserna tangenter med samma lutning. Nollställer vi de partiella derivatorna av $\bar{u}$ med avseende på q_1 och q_2, erhålles ekvationerna till de räta linjer som förbinder punkter med horisontella respektive vertikala tangenter till ellipserna i fig. 1. Eftersom dessa linjer skär varandra i centrum kan vi erhålla dess läge genom att lösa systemet av linjernas ekvationer. Systemet lyder:

$$\begin{cases} fA_1+2gB_{11}q_1+2gB_{12}q_2=0 \\ fA_2+2gB_{12}q_1+2gB_{22}q_2=0 \end{cases}$$

och dess lösning:

$$q_1=-\frac{f}{2g}\cdot\frac{A_1B_{22}-A_2B_{12}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}$$

$$q_2=-\frac{f}{2g}\cdot\frac{A_2B_{11}-A_1B_{12}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}$$

[1] Om kägelsnitt se J. Blakey, »University Mathematics», Glasgow 1949, s. 286–348.

Då vi antagit $f>0$ och $g<0$ och då det visat sig att $B_{11}\,B_{22}-B_{12}^2>0$, blir tecknet för q_1 i centrum detsamma som för $A_1\,B_{22}-A_2\,B_{12}$ och för q_2 detsamma som för $A_2\,B_{11}-A_1\,B_{12}$. Sätter vi in värdena på A_1, A_2, B_{11}, B_{12} och B_{22} erhålles

$$A_1B_{22}-A_2B_{12}=m_1m_2^2+m_1\sigma_2^2-m_1m_2^2-m_2R\sigma_1\sigma_2$$

$$=m_2\sigma_1\sigma_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{m_1}{m_2}-R\right)$$

och $$A_2B_{11}-A_1B_{12}=m_1^2m_2+m_2\sigma_1^2-m_1^2m_2-m_1R\sigma_1\sigma_2$$

$$=m_1\sigma_1\sigma_2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\frac{m_2}{m_1}-R\right)$$

Således ser vi att q_1 i centrum har ett negativt värde om $(\sigma_2/\sigma_1)\cdot(m_1/m_2)<R$ medan q_2 har ett negativt värde om $(\sigma_2/\sigma_1)\cdot(m_1/m_2)>(1/R)$. Direkt ser vi att både q_1 och q_2 ej kan vara negativa i centrum, ty om $0<R<1$ blir $1/R>1$; med andra ord kan inte $(\sigma_2/\sigma_1)\cdot(m_1/m_2)$ samtidigt vara mindre än ett tal, som är mindre än 1, och större än dess inverterade värde, som är större än 1. Vidare ser vi att både q_1 och q_2 är positiva i centrum om korrelationen är nära 0. Vid korrelation nära 1 blir däremot q_1 negativt om $(\sigma_1/m_1)>(\sigma_2/m_2)$ eller q_2 negativt om $(\sigma_2/m_2)>(\sigma_1/m_1)$. Detta innebär att vid stark korrelation den absolut högsta nyttan uppnås vid en negativ kvantitet av den tillgång som har den högsta variationskoefficienten. I centrum har nämligen $\bar{u}$ sitt absoluta maximum för alla värden på q_1 och q_2, medan värdet på $\bar{u}$ avtar ju längre ut från centrum en ellips ligger.

En annan slutsats är att om endera av varianserna är 0, dvs. om någon av tillgångarna är pengar, blir kvantiteten av den andra tillgången i centrum lika med 0. Säg att q_2 är kvantiteten pengar och att således $\sigma_2=0$ samt $m_2=1$. Då blir $A_1\,B_{22}-A_2\,B_{12}=0$ och $A_2\,B_{11}-A_1\,B_{12}=\sigma_1^2$. Vi ser av det föregående att även $B_{11}\,B_{22}-B_{12}^2=\sigma_1^2$, varför i centrum $q_1=0$ och $q_2=-f/2g$. Den absolut högsta nyttan uppnås vid en förmögenhet som endast består av den säkra tillgången i sådan mängd att ytterligare tillskott till denna ej kan förbättra situationen. Detta visar i själva verket hur starkt antagandet om riskaversion är under våra övriga antaganden. En riskaversion som avtar vid just höga förmögenheter blir omöjlig under dessa antaganden.

Vi satte tidigare en restriktion på den kvadratiska nyttofunktionen, sådan att ökat förväntat medelvärde för förmögenheten vid oförändrad varians skulle anses vara en förbättring. Vid riskaversion innebär restriktionen att $m<-f/2g$, ty $f+2gm>0$ och $g<0$. Således gäller nyttofunktio-

nen endast i ett begränsat intervall för m. Denna restriktion är emellertid otillräcklig. Vi måste nämligen även förutsätta att de partiella derivatorna av $\bar{u}$ med avseende på q_1 och q_2 är positiva, dvs. att ett ökat innehav av endera tillgången måste anses förbättra situationen. Av (3-2) framgår att ett ökat innehav av q_1 eller q_2 måste höja m. Emellertid höjs enligt (3-4) även σ^2, något som under antagandet om riskaversion är icke önskvärt. En ökad tillgångskvantitet höjer det förväntade medelvärdet av förmögenheten samtidigt som det höjer förmögenhetens osäkerhet. Hur nyttan förändras beror på vilken av effekterna som överväger. Det finns nu ingenting i våra antaganden hittills som skulle hindra att det ogynnsamma intrycket från den ökade osäkerheten dominerade. Endast om någon av tillgångarna är pengar räcker den redan införda restriktionen, ty pengarna är riskfria och det förväntade förmögenhetsvärdets varians beror således ej på kvantiteten pengar. För andra tillgångar måste vi emellertid införa en extra förutsättning om att ökat innehav leder till ökad nytta. Antagandet om handlande med hänsyn enbart till medelvärde och varians tar inte hänsyn till att en extra enhet av någon tillgång alltid kommer att ha ett icke-negativt värde, hur lågt det än är, och således betraktas som något önskvärt. Vi måste därför införa en extra restriktion för att inte de tidigare antagandena skall leda till orimliga resultat. Naturligtvis skulle detta ej behövas om engagemanget i en tillgång kunde medföra betalningsförpliktelser vid ogynnsamma situationer, men nu rör vi oss med obligationer och liknande enkla värdepapper.

Dessa nya restriktioner kan skrivas $fA_1 + 2gB_{11}q_1 + 2gB_{12}q_2 > 0$ och $fA_2 + 2gB_{12}q_1 + 2gB_{22}q_2 > 0$. Var och en av dessa resktriktioner representerar halvplan, vilka i fig. 1 avgränsas uppåt av de linjer som passerar centrum och förenar punkterna på ellipserna med horisontella respektive vertikala tangenter. Det område där preferensfunktionen gäller utgöres av intersektionen av dessa halvplan, dvs. av en konvex, konisk figur med spetsen i centrum.

Vi har nu undersökt preferensordningen i q_1q_2-planet. Skulle subjektet kunna välja helt fritt, kom han naturligtvis att välja de kvantiteter av tillgångarna som centrum representerar, ty detta motsvarar ett absolut nyttomaximum under våra antaganden. Nu skall vi emellertid förutsätta att det finns vissa restriktioner för subjektets handlande. Den första består i att den förmögenhet som skall placeras är begränsad, och begränsad i sådan utsträckning att det ej är möjligt att uppnå absoluta nyttomaximum, där inga ytterligare ökningar av tillgångsinnehavet leder till ökad nytta. Vi skall anta att förmögenheten är fixerad i initiella kvantiteter av de tillgångar vars optimala kvantiteter skall bestämmas. De initiella kvantiteterna be-

tecknas med $\bar{q}_1$ och $\bar{q}_2$. Om tillgångarnas aktuella priser betecknas p_1 och p_2 kan restriktionen skrivas

$$p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) \geqslant 0$$

Vidare skall vi anta att subjektet endast kan inneha positiva kvantiteter av tillgångarna. Med andra ord är det inte möjligt för honom att låna genom att själv emittera skuldförbindelser av samma slag som de vilka ingå i hans förmögenhet. Detta betyder att $q_1 \geqslant 0$ och $q_2 \geqslant 0$.

b) *Om optimum*

Preferensordningen och restriktionerna framgår nu av fig. 12. Såsom figuren är ritad bestäms optimum i den punkt på förmögenhetsrestriktionens gränslinje, $p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) = 0$, där denna tangerar en indifferensellips. Som synes kan tangerinspunkten ej komma utanför det område där den kvadratiska nyttofunktionen är relevant, om bägge tillgångspriserna är positiva, och om den disponibla förmögenheten är så liten att absoluta nyttomaximum i centrum ej kan uppnås. Tangenter till ellipserna med negativ lutning finns nämligen nedanför centrum endast i det koniska området där postiv gränsnytta för bägge tillgångarna gäller; och förmögenhetsrestriktionens gränslinje har negativ lutning vid positiva priser. Det är givetvis även möjligt att ha ett randvärdesmaximum med antingen $q_1 = 0$ eller $q_2 = 0$. Vi skall i fortsättningen emellertid bortse från denna möjlighet.

Vi kan alltså behandla problemet som en maximering av nyttofunktionen

$$\bar{u} = k + fA_1 q_1 + fA_2 q_2 + gB_{11} q_1^2 + 2gB_{12} q_1 q_2 + gB_{22} q_2^2 \qquad (3\text{-}5)$$

under bivillkoret

$$p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

Bilda därför funktionen

$$\bar{u}^* = \bar{u} + \lambda\{p_1(\bar{q} - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2)\} \qquad (3\text{-}7)$$

De kvantiteter q_1 och q_2 som lyder bivillkoret (3-6) och ger maximalt värde på nyttofunktionen (3-5) erhålles ur det ekvationssystem som erhålles genom att nollställa de partiella derivatorna av $\bar{u}^*$ med avseende på q_1, q_2 och λ. Betecknas de partiella derivatorna av $\bar{u}$ med avseende på q_1 och q_2 respektive $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$, kan systemet skrivas

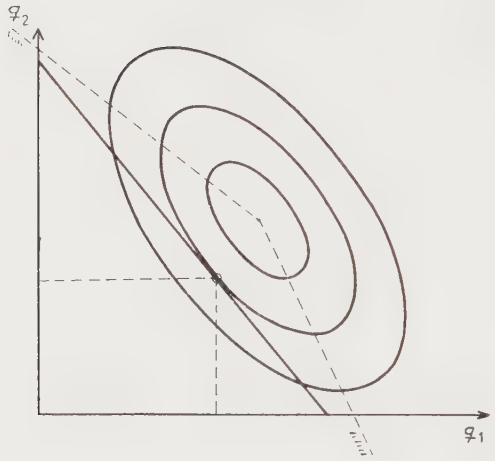


Fig. 12.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial q_1} &= \bar{u}_1 - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial q_1} &= \bar{u}_2 - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \lambda} &= p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) = 0
\end{aligned} \tag{3-8}$$

Efter insättning av $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$, dvs. de partiella derivatorna av (3-5), samt omflyttning erhåller vi

$$\begin{cases}
2gB_{11}q_1 + 2gB_{12}q_2 - p_1\lambda = -fA_1 \\
2gB_{12}q_1 + 2gB_{22}q_2 - p_2\lambda = -fA_2 \\
-p_1q_1 - p_2q_2 = -p_1\bar{q}_1 - p_2\bar{q}_2
\end{cases} \tag{3-8 a}$$

Lösningarna till ekvationssystemet blir

$$q_1 = -\frac{D_{11}}{D}fA_1 - \frac{D_{21}}{D}fA_2 - \frac{D_{31}}{D}(p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2) \tag{3-9}$$

och

$$q_2 = -\frac{D_{12}}{D}fA_1 - \frac{D_{22}}{D}fA_2 - \frac{D_{32}}{D}(p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2) \tag{3-10}$$

där

$$D = \begin{vmatrix} 2gB_{11} & 2gB_{12} & -p_1 \\ 2gB_{12} & 2gB_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{3-11}$$

Under förutsättning att andra ordningens villkor för maximum är uppfyllt anger dessa lösningar de optimala tillgångskvantiteterna. Detta andra ordningens villkor fordrar att $D>0$. Expanderad blir determinanten $D=2g(-p_1^2B_{22}+2p_1p_2B_{12}-p_2^2B_{11})$. Inom parentesen finns en kvadratisk form vilken har negativt tecken för alla värden på p_1 och p_2 när $-B_{22}<0$ och $(-B_{22})\,(-B_{11})>B_{12}^2$. Att dessa villkor gäller vid icke-negativa varianser och korrelationskoefficient mellan $+1$ och -1, har vi redan övertygat oss om. Således är parentesen negativ och $D>0$ under förutsättning att $g<0$, vilket innebär riskaversion. Resultatet av det hela är att lösningarna (3-9) och (3-10) verkligen anger optimala tillgångskvantiteter under förutsättning av riskaversion.

Co-faktorerna till determinanten D blir: $D_{11}=-p_2^2$, $D_{12}=D_{21}=p_1p_2$, $D_{22}=-p_1^2$, $D_{31}=2g(p_1B_{22}-p_2B_{12})$ och $D_{32}=2g(p_2B_{11}-p_1B_{12})$. De optimala tillgångskvantiteterna kan därför skrivas

$$q_1=\frac{fp_2(p_2A_1-p_1A_2)-2g(p_1B_{22}-p_2B_{12})(p_1\bar{q}_1+p_2\bar{q}_2)}{2g(-p_1^2B_{22}+2p_1p_2B_{12}-p_2^2B_{11})} \qquad (3\text{-}9\,a)$$

och

$$q_2=-\frac{fp_1(p_2A_1-p_1A_2)-2g(p_2B_{11}-p_1B_{12})(p_1\bar{q}_1+p_2\bar{q}_2)}{2g(-p_1^2B_{22}+2p_1p_2B_{12}-p_2^2B_{11})} \qquad (3\text{-}10\,a)$$

Vi skall anta att dessa tillgångskvantiteter är positiva. Detta betyder, som förut påpekats, att vi bortser från randvärdesmaxima vilka uppkommer när subjektet egentligen skulle vilja låna i det ena värdepapperet för att placera i det andra, men inte kan göra det på grund av det institutionella hinder vi antagit föreligga.

4. Förskjutning av optimum till följd av ändrad förmögenhet och ändrade tillgångspriser under givna förväntningar

Vi skall i detta avsnitt börja att undersöka hur förändringar i tillgångarnas priser och i storleken av den förmögenhet vilken skall placeras påverkar de optimalt innehavda tillgångskvantiteterna. Diskussionen sker under antagandet att preferenserna ej påverkas, vilket naturligtvis är orimligt, men likväl utgör ett lämpligt sätt att börja. Vi skall därför differentiera ekvationssystemet (3-8a) med avseende på samtliga storheter utom konstanterna i nyttofunktionen (3-1), k, f och g, samt de förväntningsbestämda storheterna A_1, A_2, B_{11}, B_{12} och B_{22}. Detta ger

$$\begin{cases} 2gB_{11}\Delta q_1 + 2gB_{12}\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda = \lambda\Delta p_1 \\ 2gB_{12}\Delta q_1 + 2gB_{22}\Delta q_2 - p_2\Delta\lambda = \lambda\Delta p_2 \\ -p_1\Delta q_1 \quad -p_2\Delta q_2 \quad = (q_1\Delta p_1 + q_2\Delta p_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - (\bar{q}_1\Delta p_1 + \bar{q}_2\Delta p_2) - (p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2) \end{cases} \tag{4-1}$$

Vi kan nu urskilja några olika möjligheter till förändringar: 1) Först kan vi tänka oss att priserna är oförändrade, medan den initiella förmögenheten ändras. Alltså: $\Delta p_1 = 0$ och $\Delta p_2 = 0$, samt endera $\Delta\bar{q}_1 \neq 0$ eller $\Delta\bar{q}_2 \neq 0$ eller bägge. 2) Sedan kan vi tänka oss att priserna förändras, men att det gäller att placera en i penningvärde given förmögenhet. Vi tänker oss då att de initiella tillgångskvantiteterna $\bar{q}_1$ och $\bar{q}_2$ justeras samtidigt med prisförändringarna så att förmögenhetsvärdet $p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2$ hålles konstant, dvs. $(\bar{q}_1\Delta p_1 + \bar{q}_2\Delta p_2) + (p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2) = 0$. Fallet är konstruerat men intressant därför att det utgör en direkt motsvarighet till konsumtionsteori vid flows. Ty där startar man i regel inte med några initiella kvantiteter av konsumtionsvarorna, utan dessa köps och förbrukas på nytt i varje period med en inkomst som är oberoende av konsumtionsvarupriserna. De tillgångar som utgör subjektets förmögenhet förbrukas däremot ej utan är medel att överföra köpkraft från period till period. 3) I verkligheten är därför, vid det fall vi diskuterar, förmögenheten ej given i det värde som skall placeras, utan i kvantiteter av de tillgångar vars optimala kvantiteter det gäller att fastställa. Prisförändringar medför därför att värdet av den förmögenhet som skall placeras förändras och förskjutningen av optimum blir ett netto av tre effekter. Nämligen: en substitutionseffekt till förmån för den tillgång som har blivit relativt billigare, vidare en motsvarighet till konsumtionsteorins inkomsteffekt bestående i att förmögenhetens köpkraft gentemot tillgångarna förändrats, och ytterligare en effekt som beror på att värdet av den förmögenhet som skall placeras förändrats med tillgångspriserna. Denna frågeställning är relevant då det gäller att jämföra effekten på de optimala tillgångskvantiteterna vid olika stora engångsförändringar i priserna från ett och samma utgångsläge. Man jämför alltså en viss finit prisförändring med en som är infinitesimalt större. Om den vid det förändrade priset optimala tillgångskvantiteten (eftersom skillnaden i prisförändringarna är infinitesimal kan vi tala om en enda optimal tillgångskvantitet vid det förändrade priset) är större än den faktiska, vilken varit optimal innan förändringen, överväger effekten från den ändrade köpkraften för ett givet förmögenhetsvärde. I motsatt fall överväger effekten från det ändrade förmögenhetsvärdet. Vi kommer sedan att finna att den optimala tillgångskvantiteten är större än den faktiska, när den senare har

varit optimal vid ett högre pris, och att det motsatta gäller när den faktiska kvantiteten har varit optimal vid ett lägre pris. Däremot kan vi om effekterna från minskad (ökad) köpkraft respektive ökat (minskat) förmögenhetsvärde, vilken som än överväger, endast säga att den senare är liktydig med en ökning (minskning) av den initiella förmögenheten, medan den förra är liktydig med en miskning (ökning) av den initiella förmögenheten. Hur en förändring av den initiella förmögenheten verkar kan vi i regel ej säga något entydigt om. 4) Dessbättre blir det mest realistiska fallet avsevärt enklare. Det är rimligt att förutsätta att placerarna anpassar förmögenhetens sammansättning till varje liten förändring av tillgångspriserna och att därför i utgångsläget vid varje ny förändring de optimala kvantiteterna är lika med de faktiskt innehavda. Under varje större prisförändring anpassar sig placerarna i en serie successiva steg. När alltså $\bar{q}_1 = q_1$ och $\bar{q}_2 = q_2$ samt $\Delta\bar{q}_1 = 0$ och $\Delta\bar{q}_2 = 0$, blir

$$(q_1\Delta p_1 + q_2\Delta p_2) - (\bar{q}_1\Delta p_1 + \bar{q}_2\Delta p_2) - (p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2) = 0,$$

vilket innebär att endast substitutionseffekten kvarstår. I detta fall blir tillgångsinnehavsteorin i själva verket enklare än konsumtionsteorin.

Vi skall nu genomgå de fyra olika fallen matematiskt och grafiskt, men i något annan ordning än i den föregående mera allmänna diskussionen.

1) I detta fall kan vi skriva det i början av detta avsnitt uppställda ekvationssystemet som

$$\begin{aligned} 2gB_{11}\Delta q_1 + 2gB_{12}\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda &= 0 \\ 2gB_{12}\Delta q_1 + 2gB_{22}\Delta q_2 - p_2\Delta\lambda &= 0 \\ -p_1\Delta q_1 \quad -p_2\Delta q_2 \quad &= -(p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2) \end{aligned} \tag{4-2}$$

Lösningarna till systemet blir med D definierad som i (3-11)

$$\Delta q_1 = -\frac{D_{31}}{D}(p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2) \tag{4-3}$$

$$\Delta q_2 = -\frac{D_{32}}{D}(p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2) \tag{4-4}$$

Vi kallar förmögenhetsändringen $\Delta F = p_1\Delta\bar{q}_1 + p_2\Delta\bar{q}_2$ och definierar två förmögenhetselasticiteter

$$\eta_1 = \frac{\Delta q_1}{\Delta F} \cdot \frac{F}{q_1} = \frac{-D_{31}}{D} \cdot \frac{F}{q_1} \tag{4-5}$$

och

$$\eta_2 = \frac{\Delta q_2}{\Delta F} \cdot \frac{F}{q_2} = \frac{-D_{32}}{D} \cdot \frac{F}{q_1} \tag{4-6}$$

Deras tecken är det omöjligt att avgöra generellt. Att D måste vara positivt vid riskaversion har vi övertygat oss om i föregående avsnitt. Däremot känner vi ej tecknen på D_{31} och D_{32} annat än i speciella fall. Detta framgår även av fig. 13 och 14. Enligt vad vi tidigare funnit ligger alla punkter på indifferensellipserna som har tangenter med en viss lutning utefter en rät linje genom centrum. Om vi håller tillgångspriserna konstanta och förändrar förmögenheten förskjutes förmögenhetsrestriktionens gränslinje parallellt, och vi söker en rad tangeringspunkter mellan denna gränslinje och indifferensellipserna. De punkter i q_1q_2-planet som anger optimala tillgångskvantiteter för olika stora förmögenheter vid givna tillgångspriser ligger således utmed en rät linje genom centrum. Om denna linje har positiv lutning är ingen av tillgångarna »inferior good», dvs. ett förmögenhetstillskott fördelas mellan de bägge tillgångarna. Har den negativ lutning minskar innehavet av endera tillgången när förmögenheten växer, medan alltså hela tillskottet och en del av det som tidigare hållits i denna tillgång förs över till den andra tillgången.

Fig. 13 visar ett fall där centrum ligger i den positiva kvadranten. Tre expansionslinjer vid förmögenhetsändringar för tre olika prisförhållanden visas i denna. Pilarna anger hur optimum förskjutes när förmögenheten växer. Vi ser att det vid låga förmögenhetsvärden blir randvärdesmaxima. Vid mycket små förmögenheter placerar man enbart i den ena tillgången medan vid högre förmögenheter tillgångsblandning sker. Vi ser även att om p_2 är mycket högt i förhållande till p_1, dvs. förmögenhetsrestriktionens gränslinje har mycket flack lutning, placeras vid små förmögenheter allt i tillgång 1, medan samma tillgång blir »inferior good» vid större förmögenheter. Motsvarande gäller när förmögenhetsrestiktionens gränslinje är mycket brant, dvs. när p_1 är högt i jämförelse med p_2. Slutsatsen blir att om någon tillgång är exceptionellt billig placeras små förmögenheter helt i denna tillgång medan tillgången blir »inferior good» vid större förmögenheter. Om ingen tillgång är extremt billig i förhållande till den andra placeras i regel små förmögenheter fortfarande i den ena tillgången, medan tillgångsblandning sker vid större förmögenheter; dock utan att någon tillgång blir »in-

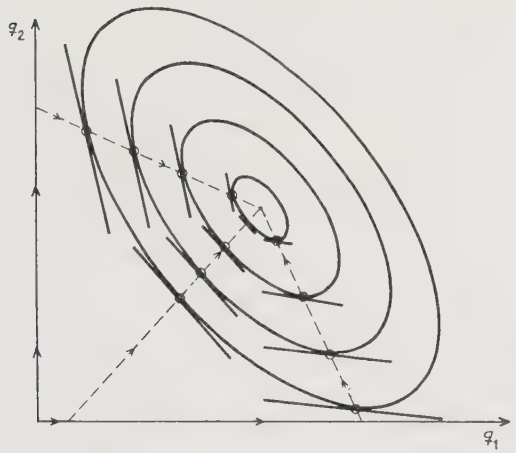


Fig. 13.

ferior». Detta gäller endast när centrum ligger i den positiva kvadranten. Förutsättningen för att så skall vara fallet är att korrelationskoefficienten ej är alltför stor och att variationskoefficienterna för de bägge tillgångarna ej är alltför olika.

I fig. 14 visas ett fall där centrum ligger vid ett negativt q_1. Som synes är i detta fall endast en typ av reaktion möjlig. Om q_1 är tillräckligt billig i förhållande till q_2, placeras små förmögenheter helt i denna tillgång, men det är ofrånkomligt att denna tillgång blir »inferior good» vid större förmögenheter och från en viss förmögenhetsstorlek placeras det endast i den andra tillgången q_2. Det är även möjligt, när q_1 ej är tillräckligt billig, att

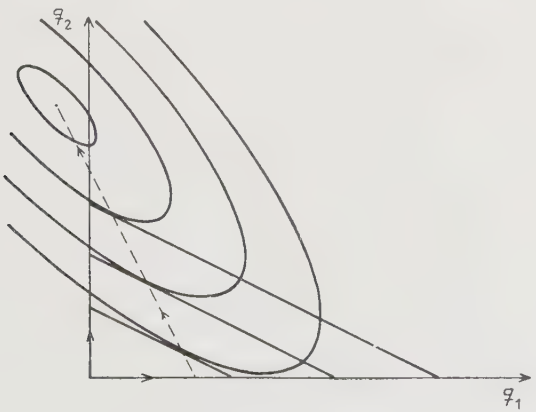


Fig. 14.

det inte placeras något i denna tillgång oavsett förmögenhetens storlek. Det fall som finns representerat i fig. 3 inträffar när korrelationskoefficienten är hög. Då är det ofrånkomligt att den tillgång, som har den högsta variationskoefficienten, från en viss förmögenhetsstorlek blir inferior good, om den överhuvud efterfrågas vid någon förmögenhetsstorlek. Motsvarande inträffar även vid låg korrelation för en tillgång om dess variationskoefficient är mycket högre än den andra tillgångens. Skulle det exempelvis gälla att $R=0$, inträffar det under förutsättning att $\sigma_2=0$, dvs. en av tillgångarna är helt riskfri, att centrum visserligen inte hamnar vid ett negativt värde på q_1 men väl på q_2-axeln, vilket leder till samma resultat. Om den ena tillgången är helt riskfri kommer den andra tillgången att bli »inferior good» om den nu överhuvud efterfrågas vid någon förmögenhetsstorlek. När förmögenheten skall fördelas mellan pengar och obligationer, blir det omöjligt att undvika att obligationerna blir »inferior goods». Vi erhåller det egendomliga resultatet, som vi redan tidigare skymtade, att medan små förmögenheter kan tänkas bli placerade i den osäkra tillgången, måste förmögenheten när den växer över en viss gräns alltmer överföras till den säkrare tillgången. På något sätt måste man genom antagandet om kvadratisk nyttofunktion ha smugglat in en riskaversion som ökar med förmögenhetens storlek. Detta är alltså en klar orimlighet hos kvadratiska nyttofunktioner, vilken, som vi senare skall se, kan undvikas vid kubisk nyttofunktion.

4) Härnäst tar vi upp det fallet då placeraren, i ögonblicket innan en prisförändring sker, faktiskt innehar optimala kvantiteter av tillgångarna. Därvid resulterar, såsom vi sett, prisförändringen endast i ett slags substitutionseffekt. Ekvationssystemet (4-1) får alltså formen

$$\begin{aligned} 2gB_{11}\Delta q_1 + 2gB_{12}\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda &= \lambda\Delta p_1 \\ 2gB_{12}\Delta q_1 + 2gB_{22}\Delta q_2 - p_2\Delta\lambda &= \lambda\Delta p_2 \\ -p_1\Delta q_1 \quad -p_2\Delta q_2 \qquad\quad &= 0 \end{aligned} \tag{4-7}$$

ty $q_1=\bar{q}_1$, $q_2=\bar{q}_2$, $\Delta\bar{q}_1=0$ och $\Delta\bar{q}_2=0$. Lösningen till systemet är

$$\Delta q_1 = \lambda\frac{D_{11}}{D}\Delta p_1 + \lambda\frac{D_{21}}{D}\Delta p_2 \tag{4-8}$$

$$\Delta q_2 = \lambda\frac{D_{12}}{D}\Delta p_1 + \lambda\frac{D_{22}}{D}\Delta p_2 \tag{4-9}$$

Vi definierar nu fyra priselasticiteter. Först sätter vi $\Delta p_2=0$, varvid erhålles

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} = \lambda \frac{D_{11}}{D} \cdot \frac{p_1}{q_1} \tag{4-10}$$

och

$$\varepsilon_{21} = \frac{\Delta q_2}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} = \lambda \frac{D_{12}}{D} \cdot \frac{p_1}{q_2} \tag{4-11}$$

På samma sätt erhålles när $\Delta p_1 = 0$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\Delta q_1}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = \lambda \frac{D_{21}}{D} \cdot \frac{p_2}{q_1} \tag{4-12}$$

och

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \lambda \frac{D_{22}}{D} \cdot \frac{p_2}{q_2} \tag{4-13}$$

Tidigare har vi sett att $D > 0$ under riskaversion, och för att första ordningens villkor för stationärläge skall ange ett relativt nyttomaximum. Följaktligen måste vi på detta stadium av diskussionen förutsätta $D > 0$, ty annars vore differentiering av första ordningens villkor meningslös. Vidare har vi sett att $D_{11} = -p_2^2$, $D_{12} = D_{21} = p_1 p_2$ och $D_{22} = -p_1^2$. Slutligen framgår det av ekvationssystemet (3-8) att $\lambda = \bar{u}_1/p_1 = \bar{u}_2/p_2$, dvs. att λ uttrycker gränsnyttan av en ytterligare placerad penningenhet. Men denna gränsnytta, som i optimum skall vara lika för bägge tillgångarna, har vi förutsatt vara positiv i det intervall där den kvadratiska nyttofunktionen har någon relevans.

Av det sagda framgår att $\varepsilon_{11} < 0$, $\varepsilon_{21} > 0$, $\varepsilon_{12} > 0$ och $\varepsilon_{22} < 0$. Således är egenelasticiteterna negativa och korselasticiteterna positiva. Detta är ju en slutsats som är entydigare än för motsvarande priselasticiteter i konsumtionsteorin. Detta är speciellt för stockproblem och beror på att då placerarna i utgångsläget är i optimum, blir förmögenhetselasticiteterna η_1 och η_2, vilkas tecken vi i allmänhet ej kan avgöra, aldrig inblandade. Detta framgår även av den följande grafiska framställningen i fig. 15.

Vi startar med en förmögenhetsrestriktion vars gränslinje är LL. Gränslinjen tangerar en indifferensellips i punkten P_0, vilken alltså representerar den högsta nytta som kan uppnås under restriktionen i fråga. Nu inträffar en prisförändring så att förmögenhetsrestriktionens gränslinje i stället får läget $L'L'$. Den nya gränslinjen måste självfallet passera genom den punkt som representerar de vid linjen LL faktiskt innehavda tillgångsmängderna,

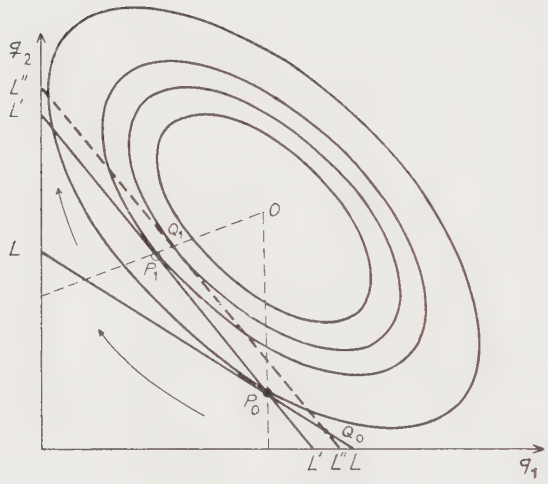


Fig. 15.

ty det är ju möjligt att helt enkelt bibehålla de faktiska innehavda kvantiteterna. Följaktligen vrider sig gränslinjen vid en prisförändring i den punkt som representerar den faktiska förmögenhetssammansättningen innan förändringen inträffar. Nu är det uppenbart att om den faktiska sammansättningen också är optimal innan förändringen, då måste vridningen ske just i punkten P_0. Restriktionslinjen vrids i den gamla optimipunkten så att den nya lutningen kommer att representera det nya förhållandet mellan tillgångspriserna. För den sålunda erhållna nya linjen $L'L'$ erhålles en ny tangeringspunkt med ellipserna i preferenssystemet nämligen P_1 i fig. 15. Det är lätt att se hur denna nya tangeringspunkt måste ligga i förhållande till den gamla. Vi vet nämligen att alla punkter där ellipserna har tangenter med lutningen LL ligger på en rät linje genom centrum O och punkten P_0: liksom tangenterna till preferenssystemet med lutning $L'L'$ gäller i punkterna på linjen genom O och P_1. Vidare gäller i området där bägge tillgångarna har positiv gränsnytta, att lokus för tangenten till ellipserna med den brantare lutningen $L'L'$ erhålles genom rotation motsols av linjen OP_0 i punkten O. Således vet vi att både P_0 och P_1 ligger på den nya budgetlinjen, och att de ligger där budgetlinjen skäres av respektive räta linjer som utgår från centrum. Den linje vars skärning med budgetlinjen bestämmer P_1 har roterats motsols i förhållande till den linje vars skärning bestämmer P_0. Eftersom budgetlinjen ligger till vänster om centrum innebär detta att P_1 måste ligga högre upp på den nya budgetlinjen än P_0. Då emellertid budgetlinjen har negativ lutning innebär det nya optimiläget en mindre kvan-

titet q_1 och en större kvantitet q_2. Den brantare lutningen som är orsak till denna förändring kan ha åstadkommits genom högre p_1 eller genom lägre p_2.

Som synes är det nya läget för budgetlinjen fullständigt bestämt genom det nya prisförhållandet. Det är likgiltigt genom vilken kombination av prisförändringar detta förhållande uppnåtts. Således blir efterfrågefunktionerna för innehav av finansiella tillgångar homogena enbart i tillgångspriserna. Detta är åter en situation som kan synas skilja sig från det vanliga i flow-teorin, nämligen att efterfrågefunktionerna är homogena i konsumtionsvarupriser och inkomst. Skälet härtill är mycket enkelt. Förmögenheten är ju sammansatt av de bägge tillgångarna och en proportionell förändring av deras priser ändrar förmögenheternas värde i samma proportion.

3) Det är viktigt att minnas att dessa slutsatser endast gäller dels fall då förmögenheten är optimalt sammansatt när förändringen inträffar. Därvid tar de bägge förmögenhetseffekterna, dvs. den som beror på förmögenhetens ändrade penningvärde och den som beror på den ändrade köpkraften gentemot tillgångar, ut varandra. Skulle förmögenheten innan förändringen ej ha varit optimalt sammansatt, dvs. hade fallet 3) varit aktuellt, skulle vridningen av budgetlinjen till dess nya lutning ej ha inträffat i punkten P_0, utan i någon annan punkt på LL. Hade den faktiska sammansättningen av förmögenheten representerats av en punkt på LL till höger om P_0 såsom t. ex. Q_0, skulle till substitutionseffekten i fig. 4 ha kommit ett netto av förmögenhetseffekterna, innebärande en parallellförskjutning av $L'L'$ åt höger. Det nya optimiläget Q_1 skulle alltså ligga på OP_1, men närmare O än P_1. Likaså skulle, om den faktiska förmögenhetssammansättningen angavs av en punkt på LL till vänster om P_0, det nya optimalläget finnas på OP_1, men längre från O än P_1. Som vi redan tillräckligt betonat under fallet 1) kan motsvarigheten till linjen OP_1 mycket väl ha negativ lutning i stället för positiv som i figuren. Dessa parallelleffekter har alltså ej entydig riktning.

2) Återstår så fallet då det gäller att undersöka hur en i penningvärde given förmögenhet placeras vid olika priser. Vid alla prisförändringar kompenseras dessa alltså på något sätt med förändringar i de initiella tillgångskvantiteterna. Detta fall är helt ointressant ur praktisk synpunkt, men har sitt intresse genom att, som vi sedan skall finna, ett höjt medelvärde för en tillgång vid konstant variationskoefficient verkar på samma sätt som en prissänkning under oförändrat förmögenhetsvärde.

I detta fall övergår såsom vi redan har sett systemet (4-1) till

$$\begin{aligned} 2gB_{11}\Delta q_1 + 2gB_{12}\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda &= \lambda\Delta p_1 \\ 2gB_{12}\Delta q_1 + 2gB_{22}\Delta q_2 - p_2\Delta\lambda &= \lambda\Delta p_2 \\ -p_1\Delta q_1 \quad -p_2\Delta q_2 \quad\quad &= q_1\Delta p_1 + q_2\Delta p_2 \end{aligned} \qquad (4\text{-}14)$$

Lösningarna blir

$$\Delta q_1 = \lambda \frac{D_{11}}{D} \Delta p_1 + \lambda \frac{D_{21}}{D} \Delta p_2 + \frac{D_{31}}{D} (q_1 \Delta p_1 + q_2 \Delta p_2) \tag{4-15}$$

$$\Delta q_2 = \lambda \frac{D_{12}}{D} \Delta p_1 + \lambda \frac{D_{22}}{D} \Delta p_2 + \frac{D_{32}}{D} (q_1 \Delta p_1 + q_2 \Delta p_2) \tag{4-16}$$

Sätt nu $\Delta p_2 = 0$ och definiera elasticiteten för q_1 och q_2 med avseenden på p_1.

$$E_{11} = \frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} = \lambda \frac{D_{11}}{D} \cdot \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1 q_1}{F} \cdot \frac{D_{31}}{D} \cdot \frac{F}{q_1}$$

Men nu är $\varepsilon_{11} = \lambda \frac{D_{11}}{D} \cdot \frac{p_1}{q_1}$ enligt (4-10) och $-\eta_1 = \frac{D_{31}}{D} \cdot \frac{F}{q_1}$ enligt (4-5). Vidare anger $p_1 q_1 / F$ värdeandelen av förmögenheten som placeras i den första tillgången; vi kan beteckna den med α_1. Vi kan därför skriva

$$\boxed{E_{11} = \varepsilon_{11} - \alpha_1 \eta_1} \tag{4-17}$$

På samma sätt erhålles

$$\boxed{E_{21} = \varepsilon_{21} - \alpha_1 \eta_2} \tag{4-18}$$

Genom att i stället sätta $\Delta p_1 = 0$ i (4-15) och (4-16) kan vi definiera elasticiteter med avseende på p_2. Dessa är

och

$$\boxed{E_{12} = \varepsilon_{12} - \alpha_2 \eta_1} \tag{4-19}$$

$$\boxed{E_{22} = \varepsilon_{22} - \alpha_2 \eta_2} \tag{4-20}$$

där α_2 anger den del av förmögenhetsvärdet som den andra tillgången utgör.

Innan vi avslutar detta kapitel skall vi härleda ytterligare några samband mellan de olika elasticiteterna. Enligt definitionerna är

$$\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 = -\frac{p_1 q_1}{F} \cdot \frac{D_{31}}{D} \cdot \frac{F}{q_1} - \frac{p_2 q_2}{F} \cdot \frac{D_{32}}{D} \cdot \frac{F}{q_2} = \frac{-p_1 D_{31} - p_2 D_{32}}{D}$$

Emellertid utgör $-p_1 D_{31} - p_2 D_{32}$ en expansion av determinanten D, varför

$$\boxed{\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2=1} \tag{4-21}$$

Vidare är enligt definitionerna

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}=\frac{\lambda\frac{D_{11}}{D}\cdot\frac{p_1}{q_1}}{\lambda\frac{D_{21}}{D}\cdot\frac{p_2}{q_1}}=\frac{D_{11}p_1}{D_{21}p_2}=\frac{-p_2^2p_1}{p_1p_2p_2}=-1$$

Således $$\boxed{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}=0} \tag{4-22}$$

Likaså blir $$\boxed{\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}=0} \tag{4-23}$$

Dessa bägge samband uttrycker vad vi förut nämnde om att efterfrågefunktionerna för tillgångar skulle vara homogena av första ordningen i tillgångspriserna.

Slutligen blir, likaså enligt definitionerna

$$\alpha_1\varepsilon_{11}+\alpha_2\varepsilon_{21}=\frac{p_1q_1}{F}\lambda\frac{D_{11}}{D}\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2q_2}{F}\lambda\frac{D_{12}}{D}\frac{p_1}{q_2}=-\frac{p_1}{F}\frac{\lambda}{D}(-p_1D_{11}-p_2D_{12})$$

Parentesen utgör emellertid en felaktig expansion av D med tredje radens element och första radens co-faktorer. En sådan expansion ger värdet 0 för parentesen. Då vidare $F\neq 0$ och $D\neq 0$ erhåller vi

$$\boxed{\alpha_1\varepsilon_{11}+\alpha_2\varepsilon_{21}=0} \tag{4-24}$$

likaså blir $$\boxed{\alpha_1\varepsilon_{12}+\alpha_2\varepsilon_{22}=0} \tag{4-25}$$

5. Exkurs om förmögenhetseffekten vid pengar och en obligation

I föregående avsnitt erhöll vi ett något egendomligt resultat. Om den ena av tillgångarna utgjordes av pengar, skulle obligationer över huvud taget inte efterfrågas vid någon förmögenhetsstorlek ifall deras pris var för högt. För det fall att priset inte var för högt, skulle enbart obligationer efterfrågas vid små förmögenheter, men när förmögenheten växte över en viss

gräns skulle dels hela förmögenhetstillskottet hållas i pengar och dels skulle en substitution av pengar i stället för obligationer ske inom den tidigare förmögenheten. Detta att den osäkra tillgången skulle hållas endast vid små förmögenheter, medan den vid växande förmögenhet både relativt och absolut skulle utgöra en allt mindre post bland tillgångarna, synes strida mot vad som i verkligheten kan iakttagas.

Låt oss nu se vad som kan motivera vårt placerande subjekts egendomliga beteende. Säg att han vid oförändrad obligationsmängd skulle erhålla ett tillskott i form av pengar. Det kan synas vara besynnerligt att han då penninginnehavet växer utöver det som han tidigare ansett vara optimalt, alltid skall bli i behov av ytterligare ökat penninginnehav. Emellertid resulterar det ökade penninginnehavet i höjt förväntat medelvärde för förmögenheten vid oförändrad varians. Subjektet som har riskaversion finner nu helt enkelt att han kan ta en mindre ökning i medelvärdet och istället minska variansen, dvs. osäkerheten. Detta gör han genom substitution inom den tidigare förmögenheten av pengar i stället för obligationer.

Det antagande om riskaversion, som vi gjort, blir dessutom snarast starkare vid växande förmögenhet under de övriga antagandena om expected utility-doktrinens giltighet och om att subjektet i sitt handlande endast tar hänsyn till medelvärde och varians. Som ett mått på riskaversionen skulle vi kunna ta differensen mellan medelvärdet i ett osäkert alternativ och dess riskfria ekvivalent. Den riskfria ekvivalenten definierar vi som det medelvärde vilket vid variansen 0 blir likvärdigt med ett visst medelvärde vid positiv varians. Således erhålles den riskfria ekvivalenten Φ till ett osäkert alternativ med medelvärdet m och variansen σ^2 ur likheten

$$\bar{u} = k + f\Phi + g\Phi^2 = k + fm + g(m^2 + \sigma^2) \tag{5-1}$$

Denna kan även skrivas

$$\Phi^2 + \frac{f}{g}\Phi - \left(\frac{f}{g}m + m^2 + \sigma^2\right) = 0 \tag{5-2}$$

Lösningen blir

$$\Phi = -\frac{f}{2g} \overset{(+)}{-} \sqrt{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2 + \sigma^2} \tag{5-3}$$

Under det första fallet i avsnittet 2 har vi förutsatt att nyttofunktionen vid riskaversion begränsas till intervallet $m < -f/2g$.

Således gäller, att $f/2g + m < 0$, varför det absoluta värdet av rotuttrycket avtar med växande m och tilltar med växande σ^2. Rotuttrycket måste vidare alltid vara reellt då ju endast kvadrerade termer med positivt förtecken

finns under rottecknet. Det är rimligt att den riskfria ekvivalenten skall växa med m och avta med σ^2. Detta förutsätter att rotuttrycket ingår med negativt förtecken.

Skillnaden mellan medelvärde och riskfri ekvivalent, dvs. det mått som anger riskaversionens styrka blir

$$m - \Phi = \left(\frac{f}{2g} + m\right) + \sqrt{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2 + \sigma^2} \tag{5-4}$$

Det är uppenbart att denna differens måste vara positiv vid $\sigma^2 > 0$, vilket ju är rimligt. Genom att derivera differensen med avseende på m ser vi huruvida riskaversionen tilltar eller avtar med växande medelvärde beroende på om derivatan är positiv eller negativ.

$$\frac{\partial(m-\Phi)}{\partial m} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{f}{2g} + m\right)}{\sqrt{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2 + \sigma^2}} = 1 + \frac{\left(\frac{f}{2g} + m\right)}{\sqrt{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2 + \sigma^2}} \tag{5-5}$$

Kvadrering av bråket ger

$$\frac{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2}{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2 + \sigma^2} < 1$$

varför

$$\left| \frac{\left(\frac{f}{2g} + m\right)}{\sqrt{\left(\frac{f}{2g} + m\right)^2 + \sigma^2}} \right| < 1$$

och

$$\frac{\partial(m-\Phi)}{\partial m} > 0 \tag{5-6}$$

I stället för en nyttofunktion där riskaversionen växer med förmögenheten skulle man vilja använda en där den successivt avtar; där alltså små förmögenheter placeras säkert medan villigheten att ta risker växer med förmögenhetens storlek. Detta synes vara omöjligt under kvadratisk nyttofunktion, men väl möjligt under kubisk. Vi skall därför fortsätta diskussionen med att förutsätta preferenser enligt det andra fallet i avsnittet 2.

Nyttofunktionen kunde då enligt (2-9) skrivas

$$\bar{u} = k + fm + g(\sigma^2 + m^2) + h(\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3) \tag{5-7}$$

med $\partial\bar{u}/\partial m = f + 2gm + 3h(m^2+\sigma^2) > 0$, vidare $\partial\bar{u}/\partial\sigma^2 = g + 3hm < 0$ under förutsättning av riskaversion, och slutligen för att riskaversionen skall avta med växande förmögenhet $(\partial^2\bar{u}/\partial\sigma^2\partial m) = 3h > 0$. Dessa förutsättningar innebär att $f > 0$, $g < 0$ och $h > 0$.

Vi antar att q_1 betecknar obligationer och q_2 pengar. Således är $\sigma_2^2 = 0$ och $m_2 = 1$. Detta betyder att

$$m = m_1 q_1 + q_2 \tag{5-8}$$

och

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 q_1^2 \tag{5-9}$$

Detta ger

$$\sigma^2 + m^2 = (\sigma_1^2 + m_1^2) q_1^2 + 2m_1 q_1 q_2 + q_2^2 \tag{5-10}$$

Uttrycken ovan för m och σ^2 är allmänt kända och torde inte behöva härledas. Detta gäller ej för tredje centralmomentet α^3. Beteckna därför obligationernas förväntade pris med $\hat{p}_1$ och förmögenhetens förväntade värde med $\hat{F}$. Tredjemomentet definieras som

$$\alpha^3 = E(\hat{F}-m)^3 = E(\hat{F}^3) - 3E(\hat{F}^2)m + 3E(\hat{F})m^2 - m^3$$
$$= E(\hat{F}^3) - 3(\sigma^2+m^2)m + 3m^3 - m^3$$

Annorlunda uttryckt är

$$\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3 = E(\hat{F}^3) \tag{5-11}$$

Nu gäller att $\hat{F} = \hat{p}_1 q_1 + q_2$ och $\hat{F}^3 = \hat{p}_1^3 q_1^3 + 3\hat{p}_1^2 q_1^2 q_2 + 3\hat{p}_1 q_1 q_2^2 + q_2^3$. Nu är emellertid $E(\hat{p}_1) = m_1$, $E(\hat{p}_1^2) = \sigma_1^2 + m_1^2$. Vidare gäller en formel motsvarande (5-11) självfallet inte endast för hela förmögenheten utan även för obligationspriset, dvs. $E(\hat{p}_1^3) = \alpha_1^3 + 3m_1\sigma_1^2 + m_1^3$. Med kännedom härom kan vi skriva

$$E(\hat{F}^3) = (\alpha_1^3 + 3m_1\sigma_1^2 + m_1^3)q_1^3 + 3(\sigma_1^2 + m_1^2)q_1^2 q_2 + 3m_1 q_1 q_2^2 + q_2^3 \tag{5-12}$$

Vi kan nu sätta in m, $\sigma^2 + m^2$ och $\alpha^3 + 3m\sigma^2 + m^3$ i ekvation (5-7). Dessförinnan definierar vi de förkortande symbolerna $A = m_1$, $B = \sigma_1^2 + m_1^2$ och $C = \alpha_1^3 + 3m_1\sigma_1^2 + m_1^3$. Nyttofunktionen formulerad för q_1 och q_2 blir då

$$\bar{u} = k + fAq_1 + fq_2 + gBq_1^2 + 2gAq_1q_2 + gq_2^2$$
$$+ hCq_1^3 + 3hBq_1^2 q_2 + 3hAq_1 q_2^2 + hq_2^3 \tag{5-13}$$

Denna nyttofunktion skall maximeras under bivillkoret att $p_1(\bar{q}_1 - q_1) + (\bar{q}_2 - q_2) = 0$. Stationärläge för nyttofunktionen vid variationer i q_1 och q_2 med uppfyllt bivillkor erhålles för den argumentpunkt som utgör lösningen till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} fA + 2gBq_1 + 2gAq_2 + 3hCq_1^2 + 6hBq_1q_2 + 3hAq_2^2 - \lambda p_1 = 0 \\ f + 2gAq_1 + 2gq_2 + 3hBq_1^2 + 6hAq_1q_2 + 3hq_2^2 - \lambda = 0 \\ (\bar{q}_1 - q_1)p_1 + (\bar{q}_2 - q_2) = 0 \end{cases} \tag{5-14}$$

Liksom förut måste vi skilja på gränsnyttan av säkra värdetillskott till förmögenheten vid placerinsperiodens slut och gränsnyttan av tillskott till förmögenheten i form av olika tillgångar vid den tidpunkt placeringsbeslutet skall fattas. Att den förra gränsnyttan antagits vara positiv är icke någon tillräcklig förutsättning för att den senare gränsnyttan skall vara det för varje tillgång. Ett undantag utgör pengar då dessa ej är behäftade med någon osäkerhet. För obligationerna måste vi införa den extra förutsättningen att $fA + 2gBq_1 + 2gAq_2 + 3hCq_1^2 + 6hBq_1q_2 + 3hAq_2^2 > 0$. Detta beror som förut på att en extra enhet av en tillgång alltid kommer att ha något värde i framtiden, om det än kan vara lågt. Sammanfattningsvis kan vi alltså säga att $\lambda > 0$ i optimum.

Det ovan angivna stationärläget är ett maximum under förutsättning att $D > 0$ och ett minimum under förutsättning att $D < 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 2gB + 6hCq_1 + 6hBq_2 & 2gA + 6hBq_1 + 6hAq_2 & -p_1 \\ 2gA + 6hBq_1 + 6hAq_2 & 2g + 6hAq_1 + 6hq_2 & -1 \\ -p_1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2g(B - A^2) + 6h(C - 2AB + A^3)q_1 + 6h(B - A^2)q_2 & 6h(B - A^2)q_1 & (A - p_1) \\ 6h(B - A^2)q_1 & 2g + 6hAq_1 + 6hq_2 & -1 \\ (A - p_1) & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{5-15}$$

Eftersom $A = m_1$, $B^2 = m_1^2 + \sigma_1^2$ och $C = \alpha_1^3 + m_1^3 + 3m_1\sigma_1^2$ erhåller vi $B - A^2 = \sigma_1^2$ och $C - 2AB + A^3 = \alpha_1^3 + m_1\sigma_1^2$. Insättes dessa värden blir $2g(B - A^2) + 6h(C - 2AB + A^3)q_1 + 6h(B - A^2)q_2 = (2g + 6hm_1q_1 + 6hq_2)\sigma_1^2 + 6h\alpha_1^3q_1$ och D övergår till

$$D = \begin{vmatrix} (2g + 6hm_1q_1 + 6hq_2)\sigma_1^2 + 6h\alpha_1^3q_1 & 6h\sigma_1^2q_1 & (m_1 - p_1) \\ 6h\sigma_1^2q_1 & (2g + 6hm_1q_1 + 6hq_2) & -1 \\ (m_1 - p_1) & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(2g + 6hm_1q_1 + 6hq_2)\sigma_1^2 - 6h\alpha_1^3q_1$$
$$-(m_1 - p_1)^2(2g + 6hm_1q_1 + 6hq_2) - 12h(m_1 - p_1)\sigma_1^2q_1 \tag{5-15 a}$$

Eftersom $m = m_1 q_1 + q_2$ kan vi skriva

$$D = -(2g + 6hm)\{\sigma_1^2 + (m_1 - p_1)^2\} - 6h\{\alpha_1^3 + 2(m_1 - p_1)\sigma_1^2\} q_1 \qquad (5\text{-}16)$$

Differentiering av ekvationssystemet ovan ger:

$$\begin{cases} (2gB + 6hCq_1 + 6hBq_2)\Delta q_1 + (2gA + 6hBq_1 - 6hAq_2)\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda = \lambda\Delta p_1 \\ (2gA + 6hBq_1 + 6hAq_2)\Delta q_1 + (2g + 6hAq_1 + 6hq_2)\Delta q_2 - \Delta\lambda \quad = 0 \\ \qquad -p_1\Delta q_1 \qquad\qquad -\Delta q_2 \qquad\qquad = -\Delta\bar{q}_2 \end{cases} \qquad (5\text{-}17)$$

Ur detta ekvationssystem kan vi lösa ut förändringarna Δq_1 och Δq_2 när vi känner förändringarna i obligationspriset och i det initiella penninginnehavet. Under förutsättning att $D > 0$ både före och efter förändringarna kan vi alltså se hur vid oelastiska förväntningar det optimala obligationsinnehavet och det optimala penninginnehavet påverkas av förändringarna i obligationspriset och i storleken av den förmögenhet som skall placeras.

$$\Delta q_1 = \lambda\frac{D_{11}}{D}\Delta p_1 - \frac{D_{31}}{D}\Delta\bar{q}_2 \qquad (5\text{-}18)$$

$$\Delta q_2 = \lambda\frac{D_{12}}{D}\Delta p_1 - \frac{D_{32}}{D}\Delta\bar{q}_2 \qquad (5\text{-}19)$$

Vi finner lätt att $D_{11} = -1$ och $D_{12} = p_1$, varför $\lambda(D_{11}/D) < 0$ och $\lambda(D_{12}/D) > 0$. Detta resultat överensstämmer med vad vi tidigare fann. Det tidigare resultatet att obligationsplaceringen i absolut värde avtar när den placerade förmögenheten växer uppstår emellertid endast om $D_{31} > 0$.

$$\begin{aligned} D_{31} &= \begin{vmatrix} 2gA + 6hBq_1 + 6hAq_2 & -p_1 \\ 2g + 6hAq_1 + 6hq_2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6h(B - A^2)q_1 & (A - p_1) \\ 2g + 6hAq_1 + 6hq_2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -6h(B - A^2)q_1 - (A - p_1)(2g + 6hAq_1 + 6hq_2) \end{aligned} \qquad (5\text{-}20)$$

Nu är emellertid $A = m_1$ och $B = m_1^2 + \sigma_1^2$ enligt våra tidigare definitioner. Således blir $B - A^2 = \sigma_1^2$ och $A - p_1 = (m_1 - p_1)$. Vidare är $m_1 q_1 + q_2 = m$, varför $2g + 6hAq_1 + 6hq_2 = 2g + 6hm$. Vi kan nu skriva

$$D_{31} = -6h\sigma_1^2 q_1 - (m_1 - p_1)(2g + 6hm) \qquad (5\text{-}21)$$

Som synes kan vi ej säkert uttala oss om tecknet på D_{31}. När vi hade kvadratisk nyttofunktion måste D_{31} alltid ha positivt värde. Under riskaversion måste sålunda $-D_{31}/D$ alltid ha negativt värde vilket betydde att en ökning av den förmögenhet som skulle placeras minskade den optimala mängden obligationer. Obligationerna blev »inferior goods». Endast vid riskpreferens kunde man erhålla en sådan förskjutning av stationärläget att inte någon tillgång behövde vara »inferior good». Vid kvadratisk nyttofunktion blev detta emellertid meningslöst eftersom stationärläget vid riskpreferens var ett minimum. Vid kubisk nyttofunktion ser vi inte något direkt skäl varken till att D_{31} måste ha positivt tecken eller till att stationärläget skulle vara ett maximum endast vid riskaversion. Således synes betydligt fler möjligheter till intuitivt rimliga resultat öppna sig vid kubisk nyttofunktion. För säkerhets skull skall vi emellertid undersöka i vilka fall ett samtidigt uppfyllande av olikheterna $D>0$ och $D_{31}<0$ är omöjligt när vi har kubisk nyttofunktion.

Vi ser $D>0$ under förutsättning att

$$12h(m_1-p_1)\sigma_1^2 q_1 < -(2g+6hm)\{\sigma_1^2+(m_1-p_1)^2\}-6h\alpha_1^3 q_1 \qquad (5\text{-}22)$$

Vidare är $D_{31}<0$ under förutsättning att

$$6h\sigma_1^2 q_1 > -(m_1-p_1)(2g+6hm) \qquad (5\text{-}23)$$

eller när
$$12h(m_1-p_1)\sigma_1^2 q_1 \lesseqgtr -2(m_1-p_1)^2(2g+6hm) \qquad (5\text{-}24\,a)$$

om
$$(m_1-p_1)\lesseqgtr 0 \qquad (5\text{-}24\,b)$$

Endast om $(m_1-p_1)>0$ kan en motsägelse uppkomma mellan de bägge olikheterna. Om nämligen i detta fall

$$-2(m_1-p_1)^2(2g+6hm) > -(2g+6hm)\{\sigma_1^2+(m_1-p_1)^2\}-6h\alpha_1^3 q_1 \qquad (5\text{-}25)$$

så kan $12h(m_1-p_1)\sigma_1^2 q_1$ omöjligt vara större än vänstra ledet i olikheten och samtidigt vara mindre än högra ledet. Olikheten kan förenklas till

$$(2g+6hm)\{(m_1-p_1)^2-\sigma_1^2\}>6h\alpha_1^3 q_1 \qquad (5\text{-}26)$$

Om denna olikhet är uppfylld tillsammans med $(m_1-p_1)>0$ leder den kubiska nyttofunktionen till samma slutsats som den kvadratiska, dvs. obligationerna blir »inferior goods» så snart stationärläget är ett maximum.

Under förutsättning att icke bägge dessa olikheter samtidigt gäller försvinner denna orimlighet vid kubiska nyttofunktioner. Fortfarande gäller emellertid resultatet från kvadratiska nyttofunktioner att en höjning av obligationspriset vid oelastiska förväntningar reducerar efterfrågan efter obligationer och ökar villigheten att hålla pengar.

6. Förskjutning av optimum till följd av ändrade tillgångspriser när förväntningarnas medelvärde är elastiskt men osäkerheten i dem ej påverkas

Vi hade ovan ekvationssystemet (3-8a) som skulle ange den optimala förmögenhetssammansättningen under förutsättning att den i (3-11) definierade determinanten D var positiv, dvs. under förutsättning att subjektet hade riskaversion. Ekvationssystemet löd

$$\begin{cases} 2gB_{11}q_1 + 2gB_{12}q_2 - \lambda p_1 = -fA_1 \\ 2gB_{12}q_1 + 2gB_{22}q_2 - \lambda p_2 = -fA_2 \\ p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) = 0 \end{cases}$$

För att undersöka hur en prisförändring påverkar den optimala fördelningen skall vi, liksom i föregående avsnitt, differentiera systemet. Nu kan vi emellertid ej längre betrakta de förväntningsbestämda koefficienterna A_1, A_2, B_{11}, B_{12} och B_{22} som konstanter. Differentieringen ger

$$\begin{cases} 2gB_{11}\Delta q_1 + 2gB_{12}\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda = \lambda\Delta p_1 - (f\Delta A_1 + 2gq_1\Delta B_{11} + 2gq_2\Delta B_{12}) \\ 2gB_{12}\Delta q_1 + 2gB_{22}\Delta q_2 - p_2\Delta\lambda = \lambda\Delta p_2 - (f\Delta A_2 + 2gq_1\Delta B_{12} + 2gq_2\Delta B_{22}) \\ -p_1\Delta q_1 \quad -p_2\Delta q_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases} \tag{6-1}$$

Under förutsättning att placeraren vid förändringens inträffande har haft förmögenheten optimalt sammansatt erhåller vi nämligen inga förmögenhetseffekter. Däremot erhåller vi en vanlig substitutionseffekt och dessutom en effekt som beror på att hela preferenssystemet har förändrats. Denna förändring av preferenssystemet är helt naturlig. När det gäller konsumtionsvaror avsedda att förbrukas sedan de väl blivit inköpta, är behovstillfredsställelsen från givna kvantiteter av dessa i regel oberoende av deras priser. Finansiella tillgångar däremot, vilka är avsedda att föra över köpkraft till framtiden, erhåller sitt värde genom sin framtida köpkraft gentemot konsumtionsvaror. Föreställningen om denna köpkraft beror på deras förväntade priser. Om dessa förväntade priser beror på de aktuella priserna, exempelvis så att ett högre aktuellt pris leder till mer optimistiska framtidsförväntningar, kommer en höjning av en tillgångs aktuella pris att i detta fall öka den behovstillfredsställelse som subjektet tror sig uppnå genom en enhet av tillgången.

Vi anger nu genom förväntningselasticiteter hur förväntningarnas medelvärden för tillgångarnas framtida priser sammanhänger med deras aktuella

priser. Dessa medelvärden är $A_1 = m_1$ och $A_2 = m_2$ och priserna är p_1 och p_2. Elasticiteterna definieras

$$e_{11} = \frac{\Delta A_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{A_1} \qquad e_{21} = \frac{\Delta A_2}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{A_2}$$

$$e_{12} = \frac{\Delta A_1}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{A_1} \qquad e_{22} = \frac{\Delta A_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{A_2} \tag{6-2}$$

Att definiera förväntningselasticiteter för en sannolikhetsfördelning kan förefalla vara en illegitim utsträckning av ett begrepp lämpat för entydiga förväntningar till risksituationer. För att i största möjliga grad fasthålla den egentliga definitionen av förväntningselasticitet skall vi som normalfall ta sådana förändringar av sannolikhetsfördelningen att varje möjligt utfall med bibehållet sannolikhetsomdöme justeras med samma procentsats och att denna entydiga procentuella förändring genom förväntningselasticiteterna sättes i samband med de procentuella förändringarna i tillgångarnas aktuella priser. Det förefaller vidare intuitivt rimligt att betrakta dylika procentuella förändringar av en sannolikhetsfördelning såsom förändringar vid konstant osäkerhet. Dessa förändringar innebär nu att variationskoefficienterna och korrelationskoefficienten hållas oförändrade.

Alltså $V_1 = \frac{\sigma_1}{m_1}$, $V_2 = \frac{\sigma_2}{m_2}$ och R är konstanta. Detta betyder att även $\frac{B_{11}}{A_1^2} = \frac{m_1^2 + \sigma_1^2}{m_1^2} = 1 + V_1^2$, $\frac{B_{12}}{A_1 B_2} = \frac{m_1 m_2 + R\sigma_1\sigma_2}{m_1 m_2} = 1 + RV_1V_2$ och $\frac{B_{22}}{A_2^2} = \frac{m_2^2 + \sigma_2^2}{m_2^2} = 1 + V_2^2$ är konstanta. Sålunda blir

$$\Delta B_{11} = 2B_{11}\frac{\Delta A_1}{A_1}$$

$$\Delta B_{12} = B_{12}\frac{\Delta B_1}{A_1} + B_{12}\frac{\Delta B_2}{A_2}$$

$$\Delta B_{22} = 2B_{22}\frac{\Delta A_2}{A_2} \tag{6-3}$$

Utnyttjar vi elasticitetsdefinitionerna (6-2) erhålles

$$\Delta A_1 = A_1 e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1} + A_1 e_{12}\frac{\Delta p_2}{p_2} \tag{6-4}$$

$$\Delta A_2 = A_2 e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_1} + A_2 e_{22}\frac{\Delta p_2}{p_2} \tag{6-5}$$

och följaktligen

$$\Delta B_{11} = 2B_{11}e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1} + 2B_{11}e_{12}\frac{\Delta p_2}{p_2} \tag{6-6}$$

$$\Delta B_{12} = B_{12}e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1} + B_{12}e_{12}\frac{\Delta p_2}{p_2} + B_{12}e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_1} + B_{12}e_{22}\frac{\Delta p_2}{p_2} \tag{6-7}$$

$$\Delta B_{22} = 2B_{22}e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_2} + 2B_{22}e_{22}\frac{\Delta p_2}{p_2} \tag{6-8}$$

Vi skall nu härleda priselasticiteterna för tillgångarna under dessa antaganden. Vi skall börja med den första tillgångens egenelasticitet. Sätt för detta ändamål $\Delta p_2 = 0$ i dels ekvationssystemet (6-1) och dels i uttrycken (6-4) t. o. m. (6-8). Därefter insättas uttrycken för ΔA_1, ΔA_2, ΔB_{11}, ΔB_{12} och ΔB_{22} i ekvationssystemet. Systemets lösning blir då

$$\begin{aligned}\Delta q_1 = {} & \lambda\frac{D_{11}}{D}\Delta p_1 - \frac{D_{11}}{D}(fA_1e_{11} + 4gB_{11}e_{11}q_1 + 2gB_{12}e_{11}q_2 + 2gB_{12}e_{21}q_2)\frac{\Delta p_1}{p_1} \\ & - \frac{D_{21}}{D}(fA_2e_{21} + 2gB_{12}e_{11}q_1 + 2gB_{12}e_{21}q_1 + 4gB_{22}e_{21}q_2)\frac{\Delta p_1}{p_1} \\ = {} & \lambda\frac{D_{11}}{D}\Delta p_1 - \frac{D_{11}}{D}(fA_1 + 2gB_{11}q_1 + 2gB_{12}q_2)e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1} - \frac{D_{11}}{D}(2gB_{11}e_{11}q_1 \\ & + 2gB_{12}e_{21}q_2)\frac{\Delta p_1}{p_1} - \frac{D_{21}}{D}(fA_2 + 2gB_{12}q_1 + 2gB_{22}q_2)e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_1} \\ & - \frac{D_{21}}{D}(2gB_{12}e_{11}q_1 + 2gB_{22}e_{21}q_2)\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2}\end{aligned} \tag{6-9}$$

Nu är emellertid $\lambda p_1 = fA_1 + 2gB_{11}q_1 + 2gB_{12}q_2$ och $\lambda p_2 = fA_2 + 2gB_{12}q_1 + 2gB_{22}q_2$ enligt (3-8 a) ovan. Vidare är $D_{21} = -(p_1/p_2)D_{11}$, ty $D_{21} = p_1p_2$ och $D_{11} = -p_2^2$. Således blir

$$-\frac{D_{11}}{D}(fA_1 + 2gB_{11}q_1 + 2gB_{12}q_2)e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1} = -\lambda\frac{D_{11}}{D}e_{11}\Delta p_1 \tag{6-10}$$

och

$$-\frac{D_{21}}{D}(fA_2 + 2gB_{12}q_1 + 2gB_{22}q_2)e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_1} = \lambda\frac{D_{11}}{D}e_{21}\Delta p_1 \tag{6-11}$$

Insättes (6-10) och (6-11) i (6-9) erhålles

$$\Delta q_1 = \lambda \frac{D_{11}}{D}(1 - e_{11} + e_{21})\Delta p_1 + \left(\frac{p_2^2}{D} 2gB_{11}q_1 - \frac{p_1 p_2}{D} 2gB_{12}q_1\right) e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1}$$

$$+ \left(\frac{p_2^2}{D} 2gB_{12}q_2 - \frac{p_1 p_2}{D} 2gB_{22}q_2\right) e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_1}$$

$$= \lambda \frac{D_{11}}{D}(1 - e_{11} + e_{21})\Delta p_1 + \frac{1}{D} 2g(B_{11}p_2 - B_{12}p_1) p_2 q_1 e_{11}\frac{\Delta p_1}{p_1}$$

$$+ \frac{1}{D} 2g(B_{12}p_2 - B_{22}p_1) p_2 q_2 e_{21}\frac{\Delta p_1}{p_1} \qquad (6\text{-}12)$$

Vi har i avsnittet 3 sett att $D_{31} = 2g(B_{22}p_1 - B_{12}p_2)$ och att $D_{32} = 2g(B_{11}p_2 - B_{12}p_1)$. Insättes dessa i (3-12) och multipliceras bägge leden därefter med $p_1/q_1 \cdot \Delta p_1$ erhålles

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1}\cdot\frac{p_1}{q_1} = \lambda \frac{D_{11}}{D}\cdot\frac{p_1}{q_1}(1 - e_{11} + e_{21}) + \left(\frac{D_{32}}{D} p_2 e_{11} - \frac{D_{31}}{D} p_2 \frac{q_2}{q_1} e_{21}\right) \qquad (6\text{-}13)$$

Nu vet vi att $D = -p_1 D_{31} - p_2 D_{32}$, eller $(D_{32}/D)p_2 = -1 - (D_{31}/D)p_1$, varför

$$\left(\frac{D_{32}}{D} p_2 e_{11} - \frac{D_{31}}{D} p_2 \frac{q_2}{q_1} e_{21}\right) = -e_{11} - \frac{D_{31}}{D} p_1 e_{11} - \frac{D_{31}}{D} p_2 \frac{q_2}{q_1} e_{21}$$

$$= -e_{11} - \frac{D_{31}}{D}\cdot\frac{1}{q_1}(p_1 q_1 e_{11} + p_2 q_2 e_{21})$$

$$= -e_{11} - \frac{D_{31}}{D}\cdot\frac{F}{q_1}\left(\frac{p_1 q_1}{F} e_{11} + \frac{p_2 q_2}{F} e_{21}\right)$$

$$= -e_{11} - \frac{D_{31}}{D}\cdot\frac{F}{q_1}(\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{21}) \qquad (6\text{-}14)$$

Med (6-14) insatt i (6-13) blir:

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1}\cdot\frac{p_1}{q_1} = \lambda \frac{D_{11}}{D}\cdot\frac{p_1}{q_1}(1 - e_{11} + e_{21}) - \left\{e_{11} + (\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{21})\frac{D_{31}}{D}\cdot\frac{F}{q_1}\right\} \qquad (6\text{-}15)$$

Enligt våra tidigare definitioner (4-5) och (4-10) är $\eta_1 = -(D_{31}/D)\cdot F/q_1$ och $\varepsilon_{11} = \lambda(D_{11}/D)\cdot p_1/q_1$. Insättes dessa elasticiteter, blir (6-15)

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1}\cdot\frac{p_1}{q_1} = \varepsilon_{11}(1 - e_{11} + e_{21}) - \{e_{11} - (\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{21})\eta_1\}$$

$$= \varepsilon_{11} - (1 + \varepsilon_{11} - \alpha_1\eta_1)e_{11} + (\varepsilon_{11} + \alpha_2\eta_1)e_{21} \qquad (6\text{-}16)$$

Enligt (4-22) är emellertid $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{12}$, varför vi kan skriva

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} = \varepsilon_{11} - (1 + \varepsilon_{11} - \alpha_1\eta_1)e_{11} - (\varepsilon_{12} - \alpha_2\eta_1)e_{21} \tag{6-17}$$

I direkt analogi erhålles den andra tillgångens egenelasticitet

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \varepsilon_{22} - (1 + \varepsilon_{22} - \alpha_2\eta_2)e_{22} - (\varepsilon_{21} - \alpha_1\eta_2)e_{12} \tag{6-18}$$

Vidare ser vi av den tredje ekvationen i systemet (6-1) att $\Delta q_2 = -(p_1/p_2)\Delta q_1$, och $\Delta q_1 = -(p_2/p_1)\Delta q_2$. Detta ger oss korselasticiteterna från (6-17) och (6-18), ty

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} = \frac{-\frac{p_1}{p_2}\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} = -\frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} \cdot \frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} \tag{6-19}$$

och

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = \frac{-\frac{p_2}{p_1}\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = -\frac{p_2 q_2}{p_1 q_1} \cdot \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} \tag{6-20}$$

Med utnyttjande av elasticitetsreglerna (4-21) t. o. m. (4-25) kan vi alltså skriva korselasticiteterna

$$\begin{aligned}\frac{\Delta q_2}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} &= \varepsilon_{21} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\varepsilon_{11} + \alpha_2\eta_2)e_{11} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\varepsilon_{12} - \alpha_2\eta_1)e_{21} \\ &= \varepsilon_{21} - (\varepsilon_{21} - \alpha_1\eta_2)e_{11} - (\varepsilon_{22} + \alpha_1\eta_1)e_{21} \\ &= \varepsilon_{21} - (\varepsilon_{21} - \alpha_1\eta_2)e_{11} - (1 + \varepsilon_{22} - \alpha_2\eta_2)e_{21}\end{aligned} \tag{6-21}$$

och

$$\begin{aligned}\frac{\Delta q_1}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} &= \varepsilon_{12} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\varepsilon_{22} + \alpha_1\eta_1)e_{22} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\varepsilon_{21} - \alpha_1\eta_2)e_{12} \\ &= \varepsilon_{12} - (\varepsilon_{12} - \alpha_2\eta_1)e_{22} - (\varepsilon_{11} + \alpha_2\eta_2)e_{12} \\ &= \varepsilon_{12} - (\varepsilon_{12} - \alpha_2\eta_1)e_{22} - (1 + \varepsilon_{11} - \alpha_1\eta_1)e_{12}\end{aligned} \tag{6-22}$$

Slutligen kan vi med elasticitetsdefinitionerna (4-17) t. o. m. (4-20) skriva priselasticiteterna vid elastiska förväntningar och given osäkerhet

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1}\cdot\frac{p_1}{q_1}=\varepsilon_{11}-(1+E_{11})e_{11}-E_{12}e_{21} \tag{6-23}$$

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta p_1}\cdot\frac{p_1}{q_2}=\varepsilon_{21}-E_{21}e_{11}-(1+E_{22})e_{21} \tag{6-24}$$

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_2}\cdot\frac{p_2}{q_1}=\varepsilon_{12}-E_{12}e_{22}-(1+E_{11})e_{12} \tag{6-25}$$

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta p_2}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\varepsilon_{22}-(1+E_{22})e_{22}-E_{21}e_{12} \tag{6-26}$$

Låt oss nu i detalj betrakta den första av dessa formler. Om förväntningarna är helt oelastiska blir (6-23) identiskt med (4-10) och anger hur efterfrågan efter den första tillgången påverkas av dess eget pris, under förutsättning att placerarens förmögenhet innan prisändringen har varit optimalt sammansatt och att preferenssystemet är givet. Vid elastiska förväntningar tillkommer två termer vilka modifierar värdet på ε_{11}. Den första av dem är $-(1+E_{11})e_{11}$. Elasticiteten E_{11} anger hur efterfrågan efter den första tillgången påverkas av dess eget pris, om hela det förmögenhetsvärde som skall placeras förblir konstant under prisförändringarna. Parentesen $(1+E_{11})$ anger hur den del av det givna förmögenhetsvärdet som placeras i den första tillgången påverkas av förändringar i dess eget pris. Det synes rimligt att som normalfall antaga att $1+E_{11}<0$, dvs. att prishöjning på en viss tillgång minskar den del av ett givet förmögenhetsvärde som placeras i denna. Skulle detta vara fallet kommer termen $-(1+E_{11})e_{11}$ att vid positiv förväntningselasticitet få ett positivt värde. Detta innebär att om vi kan försumma förväntningselasticiteterna mellan olika tillgångar, motverkas ε_{11}, som ju har ett negativt värde, genom en positiv effekt. Å andra sidan tillkommer en negativ effekt om $e_{21}>0$ och $E_{12}>0$. Det förstnämnda villkoret innebär att ett högre aktuellt pris på den första tillgången höjer förväntningarna för den andra tillgångens framtida pris. Det senare villkoret innebär att en höjning av priset på den andra tillgången höjer den optimalt innehavda kvantiteten av den första tillgången, *och* dess värdeandel, vid i penningvärde given förmögenhet.

Slutsatsen av det hela blir 1) att det höjda priset på en tillgång i och för sig framkallar substitution till förmån för den andra tillgången, 2) att i den mån förväntningarna för det framtida priset på den tillgång, vars aktuella pris har stigit, justeras upp med det aktuella priset, substitutionen i regel motverkas och 3) att i den mån förväntningarna för den andra tillgångens

pris blir mer optimistiska när den första tillgångens aktuella pris stiger substitutionen i regel stärkes.

Emellertid finns många möjligheter till undantag från dessa regelfall, ty dels är vi aldrig helt säkra på tecknen och värdena på E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, och dels kan förväntningselasticiteterna ha ganska olika värden och t.o.m. tänkas vara negativa. Allt som sagts om egenelasticiteten för en viss tillgång gäller i motsatt riktning för den andra tillgångens korselasticitet i enlighet med (6-19) och (6-20), varför vi knappast behöver diskutera korselasticiteterna särskilt.

Vi kan också grafiskt resonera om hur höjda förväntningsmedelvärden verkar på de optimala tillgångskvantiteterna. Låt oss först i nyttofunktionen (3-5) föra in möjligheter för proportionella förändringar av medelvärde och varians för varje tillgång så att deras variationskoefficienter hållas konstanta. Därför multipliceras medelvärdet m_1 och spridningen σ_1 för den första tillgången med en faktor a_1. Nar $a_1 > 1$ stiger alltså medelvärdet till $a_1 A_1$ över utgångslägets $A_1 = m_1$. Eftersom $B_{11} = m_1^2 - \sigma_1^2$ anges dess nya värde av $a_1^2 B_{11} = (a_1 m_1)^2 + (a_1 \sigma_1)^2$. Likaså definierar vi en faktor a_2 vilken representerar de relativa förändringarna av m_2 och σ_2. I stället för B_{22} skriver vi alltså $a_2^2 B_{22}$. Slutligen kan vi nu ersätta B_{12} med $a_1 a_2 B_{12} = (a_1 m_1)(a_2 m_2) + (a_1 \sigma_1)(a_2 \sigma_2) R$. Nyttofunktionen blir således

$$\bar{u} = k + fA_1(a_1 q_1) + fA_2(a_2 q_2) + gB_{11}(a_1 q_1)^2 + 2gB_{12}(a_1 q_1)(a_2 q_2) + gB_{22}(a_2 q_2)^2 \qquad (6\text{-}27)$$

Härav ser vi att om vi i en figur som innehåller preferensordningens ellipssystem transformerar q_1- och q_2-skalorna i proportion till förändringen av respektive medelvärden blir ellipssystemet kvar på samma ställe i diagrammet. Vid den nya skalan kommer i stället den i verkligheten oförändrade förmögenhetsrestriktionens gränslinje att förskjutas i axlarnas riktning i de proportioner vilka motsvarar höjningarna av respektive tillgångars förväntningsmedelvärden. I fig. 16 nedan illustreras en höjning av den första tillgångens förväntningsmedelvärde.

Enligt figuren startar vi med en situation där förmögenhetsrestriktionens gränslinje är LM och optimiläget är P. Nu inträffar en fördubbling av m_1, vilket förändrar preferenssystemet på ett sådant sätt att den grafiska bilden av indifferensellipserna blir densamma om vi även fördubblar q_1-skalan. Följaktligen blir restriktionslinjen enligt den nya skalan LM' vilken erhållits så att varje punkt på LM flyttats till dubbla avståndet i horisontell led. Bland de sålunda förflyttade punkterna finns även P', vilken enligt den nya skalan representerar den tidigare optimala kombinationen. Vi

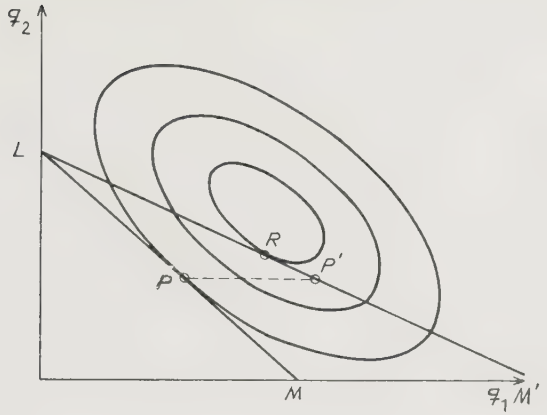


Fig. 16.

erhåller nu till följd av förändringen i den första tillgångens förväntningsmedelvärde det nya optimiläget R. Vid jämförelse med det gamla optimalläget P' ser vi att förändringen inneburit en substitution av q_2 i stället för q_1.

Skulle bägge tillgångarnas förväntningsmedelvärden vid given korrelation och givna variationskoefficienter förändras samtidigt kan resultatet analyseras med samma slags figur. Därvid förflyttas varje punkt av förmögenhetsrestriktionens gränslinje LM i horisontell led med proportionalitetsfaktorn a_1 och i vertikal led med proportionalitetsfaktorn a_2. Det är då likgiltigt i vilken ordning de horisontella och vertikala förflyttningarna görs. Resultatet blir ändå en och samma räta linje, vilken vi helt kan bestämma genom dess bägge axelintercept. Dessa intercept är: på q_1-axeln faktorn a_1 multiplicerad med LM:s horisontella axelintercept och på q_2-axeln faktorn a_2 multiplicerad med LM:s vertikala axelintercept. Under förutsättning att a_1 och a_2 är lika kommer LM genom koordinattransformationerna att parallellförflyttas. Koordinattransformationerna leder till en flackare eller brantare gränslinje för förmögenhetsrestriktionens gränslinje beroende på om a_1 har ett högre eller lägre värde än a_2.

Det som hittills har diskuterats i den grafiska framställningen är förflyttningar av gränslinjen för en *given* förmögenhetsrestriktion till följd av de koordinattransformationer vilka erfordras för att indifferensellipserna skall behålla sitt läge när förväntningsmedelvärdena varierar. Vid den matematiska analysen har vi emellertid samtidigt varit intresserade av förändringar i de aktuella tillgångspriserna och de därav inducerade förändringarna i förväntningsmedelvärdena för tillgångarnas framtida priser. Men om även de aktuella tillgångspriserna förändras kommer förmögenhetsrestriktionen verkligen att förändras så att LM förflyttas även av detta skäl och ej bara

på grund av koordinattransformationerna. Ifall förmögenheten då prisförändringarna inträffar är optimalt sammansatt kommer förmögenhetsrestriktionens gränslinje att vridas i den gamla optimalpunkten. Resultatet av dessa prisförändringar innebär således enbart en vridning genom den gamla optimipunkten när det hela betraktas såväl i de ursprungliga som i de transformerade skalorna. Den gamla optimipunkten förskjutes enbart till följd av koordinattransformationerna på sätt som redan angivits men ej till följd av prisförändringarna. Då vi redan känner förflyttningen av en punkt som resultat av bägge typerna av förändringar behöver vi ytterligare endast känna lutningen på den förändrade budgetrestriktionens gränslinje uttryckt i de nya skalorna. Denna lutning kan lätt härledas. Låter vi $b_1 p_1$ och $b_2 p_2$ ange de förändrade priserna kommer restriktionen att lyda: $(b_1\bar{q}_1 - b_1 q_1)p_1 + (b_2\bar{q}_2 - b_2 q_2)p_2 = 0$, eller — uttryckt i de transformerade variablerna $a_1 q_1$ och $a_2 q_2$ — $(b_1\bar{q}_1 - a_1 q_1 \cdot b_1/a_1)p_1 + (b_2\bar{q}_2 - a_2 q_2 \cdot b_2/a_2)p_2 = 0$. Av detta uttryck framgår att den sökta lutningen blir $-(p_1/p_2) \cdot (b_1/a_1)/(b_2/a_2)$. Resultatet av hela förändringen blir att den gamla optimipunkten förskjuts med proportionerna a_1 och a_2 i horisontell respektive vertikal led varefter hela linjen vrider sig i denna punkt så att dess lutning förändras med proportionen $(b_1/a_1)/(b_2/a_2)$. Lutningen blir således brantare om $(b_1/a_1) > (b_2/a_2)$ och flackare om $(b_1/a_1) < (b_2/a_2)$.

Låt oss slutligen undersöka de bägge tillgångarnas efterfrågeelasticiteter vid en proportionell förändring av bägge tillgångarnas priser och vid elastiska förväntningar. För den första tillgången blir denna elasticitet enligt (6-23) och (6-25)

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} + \frac{\Delta q_1}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} - (1 + E_{11})(e_{11} + e_{12}) - E_{12}(e_{21} + e_{22}) \quad (6\text{-}28)$$

Likaså erhålles enligt (6-24) och (6-26)

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} + \frac{\Delta q_2}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} - E_{21}(e_{11} + e_{12}) - (1 + E_{22})(e_{21} + e_{22}) \quad (6\text{-}29)$$

Nu vet vi emellertid enligt (4-22) och (4-23) att $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = 0$ och $\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = 0$. Vidare ser vi av sätten att definiera respektive elasticiteter att

$$E_{11} + E_{12} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} - \alpha_1\eta_1 - \alpha_2\eta_1 = -\eta_1$$

och

$$E_{21} + E_{22} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} - \alpha_1\eta_2 - \alpha_2\eta_2. = -\eta_2$$

Detta ger oss $-E_{12} = \eta_1 + E_{11}$ och $-E_{21} = \eta_2 + E_{22}$. Sålunda blir elasticiteterna vid proportionella prisändringar för respektive tillgångar

$$-(1+E_{11})\,(e_{11}+e_{12})+(\eta_1+E_{11})\,(e_{21}+e_{22}) \tag{6-30}$$

och

$$(\eta_2+E_{22})\,(e_{11}+e_{12})-(1+E_{22})\,(e_{21}+e_{22}) \tag{6-31}$$

Som synes försvinner substitutionseffekterna, vilket ju är i sin ordning då det här är fråga om proportionella ändringar av bägge tillgångarnas priser. Tidigare antog vi som normalfall att den andel av ett givet förmögenhetsvärde som skulle placeras i en tillgång avtog med högre pris på tillgången i fråga, alltså att $(1+E_{11})<0$ och $(1+E_{22})<0$. Förmögenhetselasticiteterna betecknas med η_1 och η_2. Självfallet kan endast en av förmögenhetselasticiteterna anta ett värde större än 1, ty om den ena tillgångens värdeandel ökar måste den andra tillgångens värdeandel avtaga. Detta framgår formellt av sambandet $\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2=1$, vilket även kan skrivas $\eta_1-1=(\alpha_2/\alpha_1)(\eta_2-1)$.

Vi ser nu att (6-30) med säkerhet antar ett positivt värde om $e_{11}+e_{12}>e_{21}+e_{22}$ och $\eta_1<1$. Eftersom detta implicerar $\eta_2>1$, blir under samma antaganden (6-31) negativt. Likaså blir (6-30) negativt och (6-31) positivt om $e_{21}+e_{22}>e_{11}+e_{12}$ samt $\eta_1>1$. Detta innebär att en proportionell prishöjning på bägge tillgångarna ökar efterfrågan efter en tillgång och minskar efterfrågan efter den andra tillgången, under förutsättning att, dels förväntningarna för den förstnämnda tillgångens framtida värde justeras upp relativt kraftigare än den andra tillgångens, och dels den förstnämnda tillgångens andel av förmögenhetsvärdet avtar medan den andra tillgångens andel ökar med växande förmögenhet. Om nu den första tillgången är en lång obligation och den andra tillgången en kort obligation är det tydligt att förväntningarna för den första tillgången måste justeras upp mera än för den andra tillgången. Vidare erhöll vi på grund av det i förutsättningarna implicerade antagandet om tilltagande riskaversion att en växande förmögenhet alltmer skulle överföras till den säkrare tillgången, dvs. i detta fall den korta obligationen. Det sagda innebär att vid tilltagande riskaversion vi i regel kan vara säkra på att en proportionell prisstegring vid elastiska förväntningar innebär substitution av den långa obligationen i stället för den korta. Detta gäller oavsett hur liten elasticiteten är. Om alla förväntningar är helt oelastiska, kommer en proportionell prishöjning alls ej att påverka förmögenhetens sammansättning.

Vid en riskaversion som avtar med växande förmögenhet, sådan som vi kunde erhålla vid kubisk nyttofunktion, kan vi däremot ej vara lika säkra på slutsatserna.

7. Effekten på optimum av ökad osäkerhet

Vi skall nu komplettera framställningen i föregående avsnitt med att undersöka hur förändringar av variationskoefficienterna, som vi har tagit till mått på osäkerheten i förväntningarna, påverkar förmögenhetssammansättningen. Detta problem har rönt stor uppmärksamhet bland de ekonomer vilka förfäktat den s. k. availability-doktrinen och man har sökt göra gällande, dels att ökad osäkerhet i en tillgångs framtidsförväntningar skulle leda till minskat innehav av tillgången i fråga, och dels att alla förändringar i akutella tillgångspriser framför allt skulle verka genom ökad osäkerhet om deras framtida priser. Det förefaller oss nu att problemet är av underordnad betydelse, ty argumentet om ökad osäkerhet till följd av alla förändringar, och om att detta skulle vara den dominerande påverkan av förväntningarna, synes gälla endast då myndigheterna efter en lång period av konstant räntenivå plötsligt börjar föra penningpolitik. Det gäller vid själva övergångstillfället men knappast därefter. Man kan mycket väl tänka sig aktuella prisförändringar sådana att de bekräftar någon tendens som placeraren antagit vara förhanden och sålunda minskar hans osäkerhet om de framtida priserna.

Vidare är det, som vi skall se, alls inte självklart att ökad osäkerhet måste leda till minskat innehav av den tillgång vars osäkerhet har ökat. Låt oss bara tänka på det fallet då osäkerheten växer för den tillgång som har den lägre osäkerheten. Då nu alltså förmögenhetsvärdets osäkerhet stiger kan den i regel åter nedbringas just genom ett ökat innehav av den tillgång som är orsak till den ökade osäkerheten. Huruvida detta verkligen sker är naturligtvis en fråga om den marginella substitutionskvoten mellan förmögenhetens medelvärde och varians och om den utsträckning i vilken en sådan variansminskning leder till minskat medelvärde. Det fordras således en formell analys, men argumentet visar att det inte är intuitivt självklart att osäkerhetsökningar måste ha entydig effekt.

Vi låter nu σ_1 och σ_2 förändras men håller R, m_1, m_2, p_1 och p_2 konstanta. Detta betyder att $\Delta A_1 = 0$, $\Delta A_2 = 0$, $\Delta B_{11} = 2\sigma_1 \Delta\sigma_1$, $\Delta B_{12} = R(\sigma_2 \Delta\sigma_1 + \sigma_1 \Delta\sigma_2)$ och $\Delta B_{22} = 2\sigma_2 \Delta\sigma_2$. Dessa kan nu insättas i ekvationssystemet (6-1). Därvid erhålles

$$\begin{cases} 2gB_{11}\Delta q_1 + 2gB_{12}\Delta q_2 - p_1\Delta\lambda = -2gq_1 \cdot 2\sigma_1\Delta\sigma_1 - 2gq_2 \cdot R(\sigma_2\Delta\sigma_1 + \sigma_1\Delta\sigma_2) \\ 2gB_{12}\Delta q_1 + 2gB_{22}\Delta q_2 - p_2\Delta\lambda = -2gq_2 \cdot 2\sigma_2\Delta\sigma_2 - 2gq_1 \cdot R(\sigma_2\Delta\sigma_1 + \sigma_1\Delta\sigma_2) \\ -p_1\Delta q_1 \quad -p_2\Delta q_2 \qquad = 0 \end{cases} \tag{7-1}$$

Dess lösning är

$$\Delta q_1 = \frac{D_{11}}{D}\{-2gq_1 \cdot 2\sigma_1\Delta\sigma_1 - 2gq_2 \cdot R(\sigma_2\Delta\sigma_1 + \sigma_1\Delta\sigma_2)\}$$

$$+\frac{D_{21}}{D}\{-2gq_2 \cdot 2\sigma_2\Delta\sigma_2 - 2gq_1 \cdot R(\sigma_2\Delta\sigma_1 + \sigma_1\Delta\sigma_2)\} \qquad (7\text{-}2)$$

och

$$\Delta q_2 = \frac{D_{12}}{D}\{-2gq_1 \cdot 2\sigma_1\Delta\sigma_1 - 2gq_2 \cdot R(\sigma_2\Delta\sigma_1 + \sigma_1\Delta\sigma_2)\}$$

$$+\frac{D_{22}}{D}\{-2gq_2 \cdot 2\sigma_2\Delta\sigma_2 - 2gq_1 \cdot R(\sigma_2\Delta\sigma_1 + \sigma_1\Delta\sigma_2)\} \qquad (7\text{-}3)$$

Genom att sätta $\Delta\sigma_2 = 0$ erhåller vi, eftersom $D_{21} = -\frac{p_1}{p_2}D_{11}$,

$$\Delta q_1 = -2g\frac{D_{11}}{D}\left\{2\sigma_1 q_1 + R\sigma_2 q_1\frac{p_1}{p_2} - R\sigma_2 q_2\right\}\Delta\sigma_1$$

$$= -2g\frac{D_{11}}{D}\sigma_1\left\{2q_1 + R\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}\left(1 - \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1}\right)q_1\right\}\Delta\sigma_1 \qquad (7\text{-}4)$$

Således kan vi skriva:

$$\boxed{\frac{\Delta q_1}{\Delta\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_1}{q_1} = -2g\frac{D_{11}}{D}\left\{2 + R\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right\}\sigma_1^2} \qquad (7\text{-}5)$$

Eftersom nu $V_1 = \frac{\sigma_1}{m_1}$ är $\frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{\Delta\sigma_1}{\sigma_1}$, och alltså blir även

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta V_1}\cdot\frac{V_1}{q_1} = -2g\frac{D_{11}}{D}\left\{2 + R\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right\}\sigma_1^2 \qquad (7\text{-}5\,\text{a})$$

Detta att elasticiteten blir densamma antingen vi definierar den med avseende på variansen eller med avseende på variationskoefficienten är anledning till att vi i detta avsnitt aldrig klart angav huruvida det skulle vara variansens eller variationskoefficientens ökning som skulle vara uttryck för den större risken.

På samma sätt som (7-5) härleddes kan vi även härleda

$$\boxed{\frac{\Delta q_2}{\Delta\sigma_2}\cdot\frac{\sigma_2}{q_2} = -2g\frac{D_{22}}{D}\left\{2 + R\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right\}\sigma_2^2} \qquad (7\text{-}6)$$

Av den tredje ekvationen i systemet (7-1) framgår nu att $\Delta q_2 = -(p_1/p_2)\,\Delta q_1$ och $\Delta q_1 = -(p_2/p_1)\Delta q_2$. Genom att multiplicera uttrycken (7-5) och (7-6) med respektive $-p_1/p_2$ och $-p_2/p_1$ erhåller vi korselasticiteterna för den andra respektive den första tillgången. Nu vet vi emellertid att $-(p_1/p_2)\cdot D_{11} = D_{12}$ och att $-(p_2/p_1)\cdot D_{22} = D_{21}$. Därför blir

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta \sigma_1}\cdot\frac{\sigma_1}{q_2} = -2g\frac{D_{12}}{D}\left\{2 + R\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right\}\sigma_1^2\cdot\frac{q_1}{q_2} \tag{7-7}$$

och

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta \sigma_2}\cdot\frac{\sigma_2}{q_1} = -2g\frac{D_{21}}{D}\left\{2 + R\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right\}\sigma_2^2\cdot\frac{q_2}{q_1} \tag{7-8}$$

Vi ser nu att (7-5) och (7-7) måste ha motsatta tecken, ty parenteserna är desamma medan av $-2gD_{11}/D$ och $-2gD_{12}/D$ den förra är negativ och den senare är positiv. Om således de nämnda parenteserna är positiva framkallar en ökad risk för den första tillgången en substitution av den andra tillgången i stället för denna. Likaså ser vi att om parenteserna i (7-6) och (7-8) är positiva gäller samma sak för den andra tillgångens osäkerhet. För att kunna uttrycka oss mera kortfattat, skall vi i det följande med normal reaktion beteckna det fall då en riskökning leder till minskat innehav av den tillgång vars risk har stigit och ökat innehav av den andra tillgången.

Således är reaktionen på ändringar av den första tillgångens varians normal om

$$2 + R\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) > 0 \tag{7-9}$$

och reaktionen på ändringar av den andra tillgångens varians om

$$2 + R\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\frac{p_2}{p_1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) > 0 \tag{7-10}$$

Vi skall diskutera dessa olikheter med hjälp av figuren 17 nedan, där $\sigma_2 p_1/\sigma_1 p_2$ avsätts på den horisontella och α_2/α_1 på den vertikala axeln. Observera att σ_1/p_1 och σ_2/p_2 betecknar spridningarna per investerad krona för de bägge tillgångarna, och att alltså $\sigma_2 p_1/\sigma_1 p_2$ anger förhållandet mellan spridningarna per krona. Den andra kvoten α_2/α_1 anger förhållandet

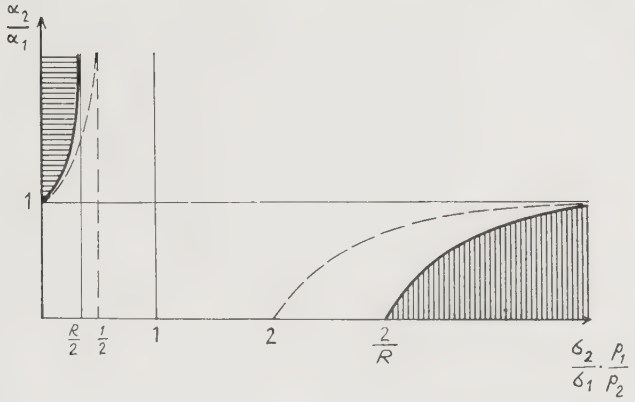


Fig. 17.

mellan de bägge tillgångarnas budgetandelar. Är denna större än 1 utgör den andra tillgången den högsta värdeandelen av förmögenheten, i annat fall domineras förmögenheten av den första tillgången.

I figuren har vi vertikalstreckat det område där olikheten (7-9) ej gäller. Gränslinjen till området börjar i $2/R$ på den horisontella axeln och stiger hyperboliskt mot den horisontella asymptoten vid värdet 1. Det område där olikheten (7-10) ej gäller har horisontalstreckats. Dess gränslinje börjar vid värdet 1 på den vertikala axeln och stiger hyperboliskt mot den vertikala asymptoten vid värdet $R/2$. Av figuren kan vi dra följande slutsatser.

1) Eftersom de bägge streckade områdena aldrig kan ligga över varandra måste endera av olikheterna (7-9) och (7-10) gälla. Dvs. riskökning kan ej för bägge tillgångarna leda till substitution av den tillgång vars risk har ökat i stället för den andra tillgången; eller annorlunda uttryckt, åtminstone förändringar i den ena tillgångens varians måste uppvisa vad vi har kallat normal effekt.

2) Eftersom de streckade områdena ligger på var sin sida om den vertikala linjen vid värdet 1, kan det alltså endast vara den tillgång, som har den lägre variansen per investerad krona, dvs. den säkrare tillgången, för vilken en variansökning leder till annat än normal reaktion.

3) Eftersom de streckade områdena även ligger på var sin sida om den horisontella linjen vid värdet 1, kan variansförändring ha onormal effekt endast för den tillgång som omfattar den större värdeandelen av förmögenheten.

4) Ju närmare 0 värdet på R är desto mer krymper de streckade områdena ihop och desto osannolikare är det att variansändringar för någon av till-

gångarna har onormala effekter. Oavsett budgetandelarnas förhållande är bägge reaktionerna normala om $R/2 < \sigma_2 p_1/\sigma_1 p_2 < 2/R$. Eftersom $+1$ är det högsta värdet R kan anta, gäller att när $1/2 < \sigma_2 p_1/\sigma_1 p_2 < 2$ måste oavsett korrelationen bägge reaktionerna vara normala. Om den större av spridningarna per krona ej är mer än dubbelt så stor som den mindre av dem, måste alltså bägge reaktionerna vara normala.

Nu har vi sett att partiellt ökad varians för bägge tillgångarna leder till substitution av den andra tillgången i stället för den vars varians har stigit, dels om korrelationen är mycket låg, dels om varianserna per investerad krona ej har alltför olika värden, och dels om den säkrare tillgången utgör mindre delen av förmögenhetsvärdet. Vid högre korrelation, mycket olika risker för de bägge tillgångarna, och en förmögenhet som till större delen är placerad i den säkrare tillgången, kan varianshöjning för den säkrare tillgången leda till ökat innehav av denna tillgång och minskat innehav av den andra. Det synes alltså som om den reaktion vi har kallat normal verkligen är den troligaste, fastän det är fullt möjligt med den motsatta reaktionen.

8. Optimal förmögenhetsplacering när den placerade förmögenhetens storlek beror på vilket belopp som undantas för omedelbar konsumtion

Vi antar nu att subjektet förutom en given förmögenhet i det ögonblick placeringsbeslutet skall fattas även har en aktuell inkomst och en med fullständig säkerhet förväntad framtida inkomst. Han skall fördela förmögenheten och den aktuella inkomsten på omedelbar konsumtion och på de bägge tillgångstyperna. Han kan följaktligen konsumera mindre än den aktuella inkomsten och alltså öka sin förmögenhet, eller han kan konsumera mer än inkomsten och alltså minska förmögenheten. Däremot skall vi anta att han ej kan konsumera mer än det sammanlagda värdet av den aktuella inkomsten och förmögenheten, vilken även innehåller värdet av eventuella tidigare uppsparade inkomster. Han kan alltså inte låna genom att själv emittera värdepapper.

Den förmögenhet som ökats eller minskats med positivt eller negativt nysparande, skall fördelas på de bägge tillgångarna. Den för konsumtion disponibla summan under den andra av modellens bägge perioder är summan av den förväntade framtidsinkomsten och det förväntade framtida värdet av den placerade förmögenheten. För att slippa strategiproblem skall vi anta att subjektet har en fullständig preferensordning enbart för kombinationer av den aktuella konsumtionen och den för framtida konsum-

tion disponibla summan. Den sistnämnda är osäker, och preferensordningen formuleras sålunda för den omedelbara konsumtionen c_1 och för den genomsnittliga förväntan m av den för framtida konsumtion disponibla summan tillsammans med osäkerheten i denna förväntan, dvs. variansen σ^2. En nyttofunktion för detta ändamål har vi redan härlett i formel (2-17), som lyder

$$\bar{u} = k + f_1 c_1 + f_2 m + g_{11} c_1^2 + 2 g_{12} c_1 m + g_{22}(m^2 + \sigma^2) \tag{8-1}$$

Eftersom den osäkra, för framtida konsumtion disponibla, summan består av de osäkra framtida värdena av tillgångskvantiteterna q_1 och q_2 och av den med full säkerhet förväntade inkomsten y_2, blir medelvärdet för denna disponibla summa:

$$m = m_1 q_1 + m_2 q_2 + y_2 \tag{8-2}$$

Som förut betecknar m_1 och m_2 de genomsnittligt förväntade värdena per enhet av de bägge tillgångarna. Variansen för den framtida disponibla konsumtionssumman blir liksom tidigare

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 q_1^2 + 2R\sigma_1\sigma_2 q_1 q_2 + \sigma_2^2 q_2^2 \tag{8-3}$$

Likaså betecknar vi som förut $A_1 = m_1$, $A_2 = m_2$, $B_{11} = m_1^2 + \sigma_1^2$, $B_{12} = m_1 m_2 + R\sigma_1\sigma_2$ och $B_{22} = m_2^2 + \sigma_2^2$. Med utnyttjande av dessa symboler erhålles genom substitution av (8-2) och (8-3) i (8-1)

$$\begin{aligned}\bar{u} = {} & k + f_1 c_1 + f_2 y_2 + f_2 A_1 q_1 + f_2 A_2 q_2 \\ & + g_{11} c_1^2 + 2 g_{12} y_2 c_1 + 2 g_{12} A_1 q_1 c_1 + 2 g_{12} A_2 q_2 c_1 \\ & + g_{22} y_2^2 + g_{22} B_{11} q_1^2 + g_{22} B_{22} q_2^2 + 2 g_{22} A_1 y_2 q_1 + 2 g_{22} A_2 y_2 q_2 + 2 g_{22} B_{12} q_1 q_2\end{aligned} \tag{8-4}$$

Restriktionen för möjliga kombinationer av aktuell konsumtion och tillgångskvantiteter lyder

$$p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) + (y_1 - c_1) = 0 \tag{8-5}$$

Det gäller nu att maximera (8-4) under bivillkor av (8-5). Första ordningens villkor för maximum är

$$\begin{cases} f_2 A_1 + 2 g_{22} A_1 y_2 + 2 g_{22} B_{11} q_1 + 2 g_{22} B_{12} q_2 + 2 g_{12} A_1 c_1 - \lambda p_1 = 0 \\ f_2 A_2 + 2 g_{22} A_2 y_2 + 2 g_{22} B_{12} q_1 + 2 g_{22} B_{22} q_2 + 2 g_{12} A_2 c_1 - \lambda p_2 = 0 \\ f_1 + 2 g_{12} y_2 + 2 g_{12} A_1 q_1 + 2 g_{12} A_2 q_2 + 2 g_{11} c_1 - \lambda = 0 \\ p_1(\bar{q}_1 - q_1) + p_2(\bar{q}_2 - q_2) + (y_1 - c_1) = 0 \end{cases} \tag{8-6}$$

där λ är en obestämd lagrangemultiplikator. Ekvationssystemet bestämmer värdet på λ tillsammans med värdena på q_1, q_2 och c_1. I vårt problem betecknar λ gränsnyttan av en ytterligare omedelbart konsumerad krona och antas därför vara positivt.

De tillgångskvantiteter och den omedelbara konsumtion, vilka bestäms av ekvationssystemet (8-6), är optimala under förutsättning att $G<0$ och G_{11}, G_{22}, $G_{33}>0$, där

$$G=\begin{vmatrix} 2g_{22}B_{11} & 2g_{22}B_{12} & 2g_{12}A_1 & -p_1 \\ 2g_{22}B_{12} & 2g_{22}B_{22} & 2g_{12}A_2 & -p_2 \\ 2g_{12}A_1 & 2g_{12}A_2 & 2g_{11} & -1 \\ -p_1 & -p_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{8-7}$$

Det är tillräckligt att $G<0$ och endast något av G_{11}, G_{22}, G_{33} är positivt, ty positivitet för de övriga impliceras då. Vidare ser vi att $G_{33}=D$, vars positivitet förutsattes som andra ordningens villkor för optimum då en given förmögenhet skulle placeras.

Vi skall nu studera hur förändringen av tillgångspriserna och inkomsterna, den aktuella och den förväntade, påverkar de optimala tillgångskvantiteterna och den optimala omedelbara konsumtionen om placerarens förmögenhet i utgångsläget har optimal storlek och sammansättning och om förväntningarna för tillgångarnas framtidspriser lämnas opåverkade. Differentiering av (8-6) ger

$$\begin{cases} 2g_{22}B_{11}\Delta q_1 + 2g_{22}B_{12}\Delta q_2 + 2g_{12}A_1\Delta c_1 - p_1\Delta\lambda = \lambda\Delta p_1 - 2g_{22}A_1\Delta y_2 \\ 2g_{22}B_{12}\Delta q_1 + 2g_{22}B_{22}\Delta q_2 - 2g_{12}A_2\Delta c_1 - p_2\Delta\lambda = \lambda\Delta p_2 - 2g_{22}A_2\Delta y_2 \\ 2g_{12}A_1\Delta q_1 + 2g_{12}A_2\Delta q_2 + 2g_{11}\Delta c_1 - \Delta\lambda = -2g_{12}\Delta y_2 \\ -p_1\Delta q_1 - p_2\Delta q_2 - \Delta c_1 = -\Delta y_1 \end{cases} \tag{8-8}$$

Lösningarna till detta ekvationssystem är

$$\Delta q_1 = \lambda\frac{G_{11}}{G}\Delta p_1 + \lambda\frac{G_{21}}{G}\Delta p_2 - \frac{G_{41}}{G}\Delta y_1 - \left(2g_{22}A_1\frac{G_{11}}{G} + 2g_{22}A_2\frac{G_{21}}{G} + 2g_{12}\frac{G_{31}}{G}\right)\Delta y_2 \tag{8-9}$$

$$\Delta q_2 = \lambda\frac{G_{12}}{G}\Delta p_1 + \lambda\frac{G_{22}}{G}\Delta p_2 - \frac{G_{42}}{G}\Delta y_1 - \left(2g_{22}A_1\frac{G_{12}}{G} + 2g_{22}A_2\frac{G_{22}}{G} + 2g_{12}\frac{G_{32}}{G}\right)\Delta y_2 \tag{8-10}$$

$$\Delta c_1 = \lambda\frac{G_{13}}{G}\Delta p_1 + \lambda\frac{G_{23}}{G}\Delta p_2 - \frac{G_{43}}{G}\Delta y_1 - \left(2g_{22}A_1\frac{G_{13}}{G} + 2g_{22}A_2\frac{G_{23}}{G} + 2g_{12}\frac{G_{33}}{G}\right)\Delta y_2 \tag{8-11}$$

Vi har förutsatt att $\lambda > 0$, $G < 0$, $G_{11} > 0$ och $G_{22} > 0$. Härav följer direkt att prishöjningar för de bägge tillgångarna leder till minskat innehav av den tillgång vars pris har stigit. Hur den andra tillgångens efterfrågan reagerar är emellertid osäkert, ty storleken av den förmögenhet som skall placeras är nu inte längre given utan är själv föremål för optimeringsbeslut. Eftersom vi således inte känner storleken av den placerade förmögenheten, kan vi heller inte säga om den omedelbara konsumtionen ökar eller minskar till följd av prishöjningen. Vidare följer av att vi inte känner hur den placerade förmögenheten påverkas, att det förblir oss obekant huruvida hänsynstagandet till variabel omedelbar konsumtion ökar eller minskar tillgångarnas elasticitet med avseende på det egna priset. Vi vet endast att den trots komplikationen förblir negativ.

Specialfall

Entydiga slutsatser kan vi däremot nå om vi förenklar förutsättningarna. En dylik förenkling erhålles genom att sätta $g_{12} = 0$ i ekvation (8-1) ovan. Denna förenkling innebär att indifferenskurvorna i $m\sigma^2$-planet för olika givna värden på c_1 har samma form. Endast det preferensindex, som svarar mot varje indifferenskurva, förändras. Tar vi förväntningarna som givna och i stället betraktar nyttofunktionen (8-4), vilken är formulerad för c_1 och tillgångskvantiteterna, finner vi att detsamma gäller för indifferenskurvorna i $q_1 q_2$-planet för olika givna värden på c_1. Är nu den initiella förmögenhet som skall placeras och tillgångspriserna givna, betyder det att den optimala sammansättningen av förmögenheten ej påverkas av den omedelbara konsumtionens storlek. Vår förenklade förutsättning innebär alltså att den optimala sammansättningen vid givna tillgångspriser av en i penningvärde given förmögenhet ej beror av den aktuella konsumtionens storlek.

I detta fall erhåller vi:

$$G = \begin{vmatrix} 2g_{22}B_{11} & 2g_{22}B_{12} & 0 & -p_1 \\ 2g_{22}B_{12} & 2g_{22}B_{22} & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 2g_{11} & -1 \\ -p_1 & -p_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \tag{8-12}$$

De uträknade värdena för G och dess co-faktorer blir:

$$G = -4g_{22}^2(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) - 4g_{11}g_{22}(p_1^2 B_{22} - 2p_1 p_2 B_{12} + p_2^2 B_{11}) \tag{8-13}$$

$$G_{11} = -2(g_{11}p_2^2 + g_{22}B_{22}) > 0 \tag{8-14}$$

$$G_{22} = -2(g_{11}p_1^2 + g_{22}B_{11}) > 0 \tag{8-15}$$

$$G_{33} = -2g_{22}(p_1^2 B_{22} - 2p_1 p_2 B_{12} + p_2^2 B_{11}) > 0 \tag{8-16}$$

$$G_{12} = G_{21} = 2(g_{11} p_1 p_2 + g_{22} B_{12}) < 0 \tag{8-17}$$

$$G_{13} = G_{31} = 2g_{22}(B_{22} p_1 - B_{12} p_2) = D_{31} \text{ ovan} \tag{8-18}$$

$$G_{23} = G_{32} = 2g_{22}(B_{11} p_2 - B_{12} p_1) = D_{32} \text{ ovan} \tag{8-19}$$

$$G_{14} = G_{41} = 4g_{11} g_{22}(B_{22} p_1 - B_{12} p_2) \tag{8-20}$$

$$G_{24} = G_{42} = 4g_{11} g_{22}(B_{11} p_2 - B_{12} p_1) \tag{8-21}$$

$$G_{34} = G_{43} = 4g_{22}^2(B_{11} B_{22} - B_{12}^2) > 0 \tag{8-22}$$

Den sextonde av co-faktorerna G_{44} är vi ej intresserade av. Andra ordningens villkor för optimum förutsätter att de tre första av co-faktorerna är positiva. Det vi i övrigt vet är att $g_{11} < 0$, $g_{22} < 0$ och att $(B_{11} B_{22} - B_{12}^2) > 0$. Härav följer $G_{12} = G_{21} < 0$ och $G_{34} = G_{43} > 0$. Detta följer alltså av antagandet om riskaversion och av sättet att definiera R så att dess numeriska värde blir mindre än ett. Slutsatserna av specialfallet är att en prishöjning på en tillgång ökar efterfrågan efter den andra tillgången och att en ökning av den aktuella inkomsten höjer den omedelbara konsumtionen.

Vi kan emellertid ytterligare dra några slutsatser av specialfallet. Eftersom $G_{13} = D_{31}$ och $G_{23} = D_{32}$, vilket framgår av (3-11), är den första av dem positiv enligt (4-3) endast om den första tillgången är »inferior good», och likaså är den andra av dem positiv endast om den andra tillgången är »inferior good» enligt (4-4). Följaktligen ökar enligt (8-11) den omedelbara konsumtionen vid höjning av priserna på de tillgångar som ej är »inferior». Detta ger slutsatsen att prishöjningar på tillgångarna, vilket också betyder räntefall, i regel leder till ökad omedelbar konsumtion. Ett undantag utgör de tillgångar vilka är »inferior goods». Prishöjningar på dem leder till minskad omedelbar konsumtion.

Som vi har sett, gäller, på grund av den starka riskaversion som impliceras av den kvadratiska nyttofunktionen, att obligationerna blir »inferior goods» när den andra tillgången är pengar och alltså riskfri. Följaktligen leder då en prishöjning på obligationer, dvs. en fallande effektiv ränta, till minskad omedelbar konsumtion. Villigheten att inneha pengar ökar alltså mycket starkt när obligationspriset stiger, ty dels ökar värdet av den initiella förmögenheten och dels minskar såväl obligationsplaceringarna som den omedelbara konsumtionen.

Ett korollarium på vad vi har sagt om »inferior goods» finner vi om vi observerar att G_{13} måste ha motsatt tecken mot G_{41} och att G_{23} likaså måste ha motsatt tecken mot G_{42}. Om G_{13} är negativt blir alltså G_{41} positivt

och enligt (8-9) leder en ökning av den aktuella inkomsten till ökat innehav av den första tillgången. På motsvarande sätt kan vi argumentera att när $G_{23} < 0$ ökar efterfrågan efter den andra tillgången vid stigande aktuell inkomst.

Som sammanfattning för specialfallet kan vi säga att prishöjningar på en tillgång leder till minskat innehav av denna och ökat innehav av den andra tillgången. Vidare leder prishöjningen till ökad omedelbar konsumtion om tillgången vars pris har stigit ej är »inferior». En ökning av den aktuella inkomsten leder till ökad omedelbar konsumtion och till ökat innehav av de tillgångar vilka ej är »inferior». Dessa slutsatser gäller endast för det fallet där den optimala fördelningen av ett givet förmögenhetsvärde vid konstanta tillgångspriser ej beror på den aktuella konsumtionens storlek. Skulle denna specialförutsättning ej gälla, kan vi endast säga att efterfrågan minskar efter den tillgång vars pris har stigit.

9. Sammanfattning

Vi skall nu försöka sammanfatta de slutsatser som kan dras från den föregående framställningen. Vårt problem har varit att undersöka hur ett enskilt subjekt fördelar sin förmögenhet mellan två olika finansiella tillgångar under en viss placeringsperiod. I det mest generella fallet gäller det för subjektet att också bestämma huruvida han omedelbart skall konsumera sin förmögenhet, helt eller delvis och således förbruka mer än sin aktuella inkomst, eller om han skall spara en del av inkomsten för att i stället öka förmögenheten. Förmögenheten har till syfte att överföra köpkraft till framtiden. Subjektet har alltså att väga fördelarna med hög omedelbar konsumtion mot fördelarna med hög framtida potentiell konsumtion. Samtidigt skall han, eftersom vi antar att minst en av tillgångarna har osäkert framtida marknadsvärde, också väga fördelarna av en säkert sammansatt förmögenhet mot fördelarna av en i genomsnitt högt förräntad förmögenhet.

Vi har förutsatt att de enda relevanta storheterna för subjektets preferenser är dels värdet av den omedelbara konsumtionen och dels det för konsumtion disponibla värdet vid placeringsperiodens slut. Det förra värdet kan subjektet fritt bestämma inom den ram som utgöres av hans initiella förmögenhet och den aktuella inkomsten. Det senare värdet kan han däremot ej bestämma annat än indirekt, genom att fastställa fördelningen på de bägge tillgångarna av det som återstår av inkomst och förmögenhet efter den omedelbara konsumtionen. Vad värdet av en på visst sätt sammansatt förmögenhet kommer att bli vid placeringsperiodens slut vet han ej med säkerhet, ty det beror på de framtida tillgångspriserna. Han antas emellertid

ha förväntningar som kvantitativt preciserade sannolikheter för varje tänkbar kombination av framtida tillgångspriser. Följaktligen kan han ange en sannolikhetsfördelning för det framtida värdet av förmögenheten vid varje kombination av tillgångskvantiteter.

Vi har antagit att en sådan sannolikhetsfördelning värderas efter medelvärdet såsom mått på tyngdpunkten i förväntningarna och efter variansen såsom mått på subjektets osäkerhet om det framtida värdet faktiskt skall bli det genomsnittligt förväntade. En hög genomsnittlig förväntan har antagits vara något önskvärt, medan osäkerheten förutsätts skola nedbringas så mycket som möjligt. Bland våra förutsättningar om karaktären hos valhandlingarna mellan alternativ med osäkra konsekvenser, finns även »expected utility»-doktrinen, vilken i sin nya axiomatiska form är så vitt spridd inom den litteratur som behandlar ekonomiska risksituationer att vi knappast särskilt behöver motivera dess användning.

Emellertid bör det observeras att kombinationen av förutsättningar leder till mycket stark riskaversion, vilken faktiskt tilltar med växande förmögenhet. För att slippa detta har vi i delar av framställningen förutsatt att subjektet värderar sannolikhetsfördelningarna inte enbart med hänsyn till medelvärde och varians, utan att han dessutom behöver känna tredjemomentet såsom mått på snedheten i sannolikhetsfördelningen. En positiv snedhet innebär att sannolikhetsmassan för värden under medelvärdet ligger hoptryckt nära detta, medan massan för värden över medelvärdet ligger utsträckt över ett större intervall. Eftersom detta innebär en risk för värden som ligger starkt under det genomsnittliga, vilken är obetydlig i jämförelse med chanserna till mycket höga värden, är ett högt tredjemoment i och för sig eftersträvansvärt. Det visar sig att vi med denna modifikation får fram en riskaversion vilken, om så önskas, kan fås att avta med växande förmögenhet.

Vi började med att undersöka delproblemet om fördelningen av en given förmögenhet vid givna tillgångspriser. Bland de möjliga kombinationerna av tillgångskvantiteter antogs subjektet alltså utvälja den som ledde till den enligt hans mening fördelaktigaste kombinationen av i genomsnitt förväntat framtida förmögenhetsvärde och osäkerheten i hans förväntningar. Ett definitivt optimum erhöll vi under förutsättning av riskaversion. Detta optimum kunde naturligtvis tänkas innebära en negativ kvantitet för någon av tillgångarna. Om det förelåg institutionella hinder mot att i ett dylikt fall låna genom utgivande av egna skuldförbindelser, med samma förväntningar för deras framtida marknadsvärde som för tillgångarnas, skulle detta optimum ej kunna uppnås. Det bästa möjliga sättet att sammansätta förmögenheten skulle då vara att endast inneha den ena obligationen för hela intervall av

relativa tillgångspriser. Vid riskpreferens skulle det däremot inte alls finnas något bestämt optimum, utan subjektet skulle kunna förbättra situationen obegränsat genom att låna i den ena tillgången för att placera i den andra. Vid institutionella hinder för lån skulle även i detta fall en bestämd bästa möjlig sammansättning finnas bestående i att endast den ena tillgången innehas. Emellertid finns det ej i detta fall något intervall för relativa priser inom vilket tillgångsblandning ifrågakommer. Om förhållandet mellan tillgångspriserna överskrider ett visst kritiskt värde flyttas hela förmögenheten över från den ena tillgången till den andra.

Det gällde sedan att undersöka hur förändringar av den förmögenhet, vilken skulle placeras, och av tillgångspriserna, skulle verka på förmögenhetssammansättningen. Beträffande effekten av ändringar i förmögenhetens storlek kunde vi ej komma till något entydigt resultat. Det kunde tänkas att någon av tillgångarna skulle reagera som »inferior good». Tillgången med den högsta variationskoefficienten skulle vid hög korrelation alltid göra det från en viss förmögenhetsstorlek och uppåt, om den överhuvud taget efterfrågades vid någon förmögenhetsstorlek. Att den osäkrare tillgången endast skulle hållas vid små förmögenheter synes vara en orimlighet vilken sammanhänger med de starka riskaversionsantagandena.

Beträffande ändringar i tillgångspriserna vid givna förväntningar kunde vi däremot vara säkra på effekten. Med tanke på vad som gäller i konsumtionsteorin, kan detta förefalla egendomligt, då vi just har hävdat att vi ej känner riktningen av motsvarigheten till konsumtionsteorins inkomsteffekt. Emellertid erhåller vi i tillgångsoptimeringsproblemet två slags förmögenhetseffekter, en som sammanhänger med att köpkraften gentemot tillgångar av ett givet förmögenhetsvärde ändras med tillgångspriserna, och en som beror på att förmögenhetens värde självt ändras om förmögenheten redan förut består av de tillgångar vars priser förändrats. Om subjektet i det ögonblick en förändring inträffar har sin förmögenhet optimalt sammansatt uppväger de bägge förmögenhetseffekterna varandra och kvar finns endast en substitutionseffekt till förmån för den tillgång som har blivit relativt billigare.

Nu kunde vi emellertid knappast räkna med att preferenssystemet skulle vara oberoende av tillgångarnas aktuella priser. Tillgångarna hade ju till syfte att föra över köpkraft till framtiden, och i den mån förväntningarna för deras framtida värde påverkades av de aktuella priserna, skulle själva preferenssystemet förändras med tillgångspriserna. Vi började analysera vad elasticitet i förväntningarna skulle göra för skillnad. Problemet definierades så att alla tänkbara utfall för en tillgångs framtida värde skulle förändras i en och samma proportion, vars förhållande till den relativa ändringen av

dennas, eller den andra tillgångens, aktuella pris angavs av respektive förväntningselasticiteter. Osäkerheten uppfattad som variationskoefficienter skulle däremot ej påverkas. En positiv elasticitet mellan en tillgångs aktuella pris och dess förväntade värde skulle komma att motverka den i föregående stycke nämnda substitutionen till förmån för den relativt billigare tillgången, under förutsättning att efterfrågan vid i penningvärde given förmögenhet efter den tillgång vars pris har fallit ökar proportionellt mer än priset faller. Förutsättningen kan även formuleras så att en större del av ett givet förmögenhetsvärde placeras i en tillgång ju lägre dess pris är. Att förutsättningen gäller kan vi ej vara helt säkra på. Visserligen skulle prisfallet stimulera efterfrågan efter en tillgång vid optimalt sammansatt förmögenhet, men för att förmögenhetsvärdet skall hållas konstant måste de initiella tillgångskvantiteterna förändras så att prisfallet motverkas. Följaktligen uppstår en förmögenhetseffekt vars riktning vi ej känner. Emellertid förefaller det i och för sig rimligt att en större del av ett givet förmögenhetsvärde skall placeras i den relativt billigare tillgången. Av detta följer att positiv elasticitet mellan en tillgångs aktuella och dess förväntade värden motverkar substitutionen till förmån för den relativt billigare tillgången. Emellertid har positiv förväntningselasticitet korsvis mellan tillgångarna motsatt verkan så att substitutionen stärkes. Hur förväntningselasticitet verkar på substitutionen kan därför inte sägas entydigt.

Det kunde nu även tänkas att osäkerheten påverkades av ändringar i de aktuella tillgångspriserna. Anhängarna av »availability»-doktrinen gör gällande att osäkerheten alltid skulle ökas av varje prisförändring. Emellertid synes detta argument knappast gälla annat än i en situation då de monetära myndigheterna efter en lång tid av stabila räntesatser just börjar bedriva aktiv penningpolitik.

Lika litet som vi kan vara säkra på prisförändringarnas effekt på osäkerheten, lika litet känner vi effekten på subjektets optimum från ökad osäkerhet. Av vår undersökning framgår att riskökning för en tillgång i de flesta fall leder till minskat innehav av den tillgång vars osäkerhet har stigit. Om emellertid korrelationen är hög, risken uppfattad som variansen per investerad krona mycket olika för de bägge tillgångarna, och om förmögenheten till större delen är placerad i den säkra tillgången leder en variansökning för den säkrare tillgången till ökat innehav av denna. Att så är fallet torde ej förvåna, ty riskhöjningen för det framtida förmögenhetsvärdet, till vilken ökningen av den säkrare tillgångens risk är skuld, kan ju nedbringas just genom ett ökat innehav av den tillgång vars risk har stigit. Blir det riskökning till följd av att en tillgångs pris har ändrats gäller den troligen bägge tillgångarna. I de flesta fall motverkar de varandra. Emeller-

tid kan det tänkas fall då riskökningarna för bägge tillgångarna samverkar till en substitution till förmån för den säkrare tillgången.

Slutligen släppte vi förutsättningen att det skulle vara en given förmögenhet som skulle placeras. Själva storleken av den förmögenhet vilken skulle placeras berodde på vilket värde som skulle konsumeras omedelbart. Däremot återtog vi för att renodla den nya problemställningen förutsättningarna om opåverkade förväntningar och risk. Det visade sig att vi i det generella fallet knappast kunde säga mera än att efterfrågan efter en tillgång skulle avta när dess pris höjdes. Genom att föra in en specialförutsättning, innebärande att den optimala sammansättningen av en given förmögenhet vid givna tillgångspriser och förväntningar ej skulle bero av den aktuella konsumtionsstandarden, kunde vi erhålla betydligt mer entydiga slutsatser. Prishöjningar på en tillgång skulle då leda till inte bara minskat innehav av denna, utan de skulle även öka innehavet av den andra tillgången; samt öka den omedelbara konsumtionen under förutsättning att tillgången vars pris har stigit ej är »inferior good». Om priset stiger på en tillgång som är »inferior», kommer den omedelbara konsumtionen att minska. Inkomstökningar leder till ökad konsumtion och naturligtvis till ökat innehav av de tillgångar vilka ej är »inferior goods».

Kapitel VII

DYNAMISK PLANERING AV VÄRDEPAPPERSINNEHAV VID OSÄKERHET

1. Inledning

I föreliggande kapitel skall vi skissera en teori för optimal värdepappersplacering under osäkerhet för det fall då placeraren ej endast intresserar sig för den placerade förmögenhetens värde vid en enda tidpunkt, utan då dennes preferenser formuleras för den sekvens av konsumerade värden, vilken bestäms av placerarens köp och försäljning av värdepapper under det antal perioder som planeringen omfattar och av dessa pappers prisutveckling. Detta blir något komplicerat eftersom placeraren varken kan besluta för en period i taget oberoende av sina framtida beslut eller kan fatta ett simultant beslut för placeringsformerna under samtliga perioder. Även om placerarens förväntningar för prisutvecklingen ej förändras under tidens lopp, kommer denne, om han ej binder sina framtida dispositioner, att kunna utnyttja den miskning i osäkerheten som vetskapen om en del av den följande marknadsutvecklingen medför. Planeringen för framtiden torde sålunda ske i form av en strategi som föreskriver alternativa beslut för de framtida placeringsformerna beroende på utvecklingen fram till de tidpunkter då besluten skall fattas. Det beslut rörande placeringen som omedelbart skall effektueras beror således på dessa konditionella planer för det framtida handlandet. Därav följer att de realiserade placeringsformerna varken kommer att bero enbart på förväntningarna eller enbart på den realiserade prisutvecklingen, utan på de bägge faktorerna i kombination.[1]

För att kunna behandla det aktuella problemet i en formell periodanalys måste vi nu göra vissa förenklande förutsättningar. Planeringen antas ske för n perioder. Under dessa förväntar placeraren att erhålla inkomsterna $y_1, \ldots . y_n$, vilka antas vara kända med full säkerhet. Dessa inkomster erhålles vid periodsluten, då även värdena $c_1, \ldots . c_n$ av under respektive perioder konsumerade varor utbetalas. Konsumtionsvarupriserna för samtliga pe-

[1] Framställningen i det följande bygger på samma förutsättningar som chapt. XIII i H. M. Markowitz, »Portfolio Selection», New York 1959, s. 275 ff.

rioder antas vara kända vid den första periodens början, så att preferenserna kan formuleras för sekvensen av konsumerade värden genom $U(c_1, ..., c_n)$.

När denna sekvens av konsumerade värden är osäker, men sannolikhetsfördelad så att varje tänkbar sekvens kan förknippas med en sannolikhet eller relativ frekvens, antar vi att de olika sannolikhetsfördelningar som följer på olika handlingssätt värderas enligt »expected utility doctrine». En viss frekvensfunktion $g(c_1, ..., c_n)$ värderas sålunda efter sin matematiskt förväntade nytta beräknad genom $\int ... \int U(c_1, ..., c_n) g(c_1, ..., c_n) dc_1 ... dc_m$, där integrationen sker över hela domänen för funktionen $g(c_1, ..., c_n)$. Nyttofunktionen är därvid unik upp till lineära transformationer. Denna tillämpning av »expected utility doctrine» kan grundas på precis samma axiomatiska antaganden som de tidigare, ty härledningen gäller antingen det är ett enda konsumtionsvärde eller en hel vektor av konsumtionsvärden som förväntningarna avser.[1]

2. Precisering av problemställningen vid ett värdepapper

Vi skall nu anta att placeraren kan föra över potentiellt konsumtionsvärde från varje period till de följande genom innehavet av ett värdepapper. Värdepapperspriserna antas bli uppfattade av placeraren som konstanta inom varje period, men varierande mellan olika perioder. De betecknas med $p_1, ..., p_n$. De framtida värdepapperspriserna är osäkra vid den första periodens början, men varje möjlig sekvens av priser förknippas med en relativ frekvens enligt funktionen $\phi(p_1, ..., p_n)$.

Placeraren antas under varje period hålla den innehavda värdepappersmängden oförändrad. Värdepapper köps eller säljs endast vid periodsluten samtidigt med att inkomsterna erhålles och konsumtionsvarorna betalas. Värdepappersmängderna betecknas $q_0, ..., q_{n-1}$, så att mängden av värdepapper som innehas under den t:te perioden betecknas q_{t-1}. Detta vid första påseendet egendomliga beteckningssätt beror på att den under en viss period innehavda mängden obligationer har behållits sedan slutet av närmast föregående period då värdepapperspriset var ett annat än det akutella. Eftersom detta pris uppfattas som konstant under varje period finns det ingen anledning att förändra innehavet före periodens slut då alla betalningar av inkomst och konsumtion äger rum även om priset är ett annat än under föregående period från vilken tillgångsmängden har blivit kvar. Eftersom tillgångsmängden är en beståndsstorhet kan den antingen identifieras med numret på den period under vilken den huvudsakligen innehavs,

[1] Se H. M. Markowitz, »Portfolio Selection», New York 1959, s. 247 ff.

eller med numret på den närmast föregående period vid vars slut den har fixerats. Vi har valt det senare alternativet. Sålunda betecknar q_0 den initiella tillgångskvantiteten under den första perioden. Den sista kvantiteten är q_{n-1}, eftersom planeringen endast sker för de n perioderna och inga tillgångar lämnas kvar från den n:te perioden.

Det konsumerade värdet under varje period är lika med summan av dess inkomst ökad med nettovärdet av under perioden sålda värdepapper eller minskad med nettovärdet av under perioden köpta värdepapper, dvs. $c_t = y_t + p_t(q_{t-1} - q_t)$ för $t = 1, \ldots, n$. Därvid är q_0 en given initiell värdepapperskvantitet. Förutsätter vi att $q_n = 0$, dvs. att placeraren ej avser att lämna kvar någon förmögenhet efter de n perioder för vilka planeringen sker, kommer sekvensen $c_1, \ldots, c_n$ endast att bero på utvecklingen av värdepapperspriserna $p_1, \ldots, p_n$ och på de $(n-1)$ värdepapperskvantiteterna $q_1, \ldots, q_{n-1}$. Dessa $(n-1)$ kvantiteter kan antas vara de storheter som placeraren söker optimala värden för. Optimeringen går ej ut på att simultant fastställa entydiga värden för $q_1, \ldots, q_{n-1}$, utan på att fastställa konditionella optimalvärden för varje kvantitet q_t beroende på den faktiska prisutvecklingen $p_1, \ldots, p_t$ fram till den period då kvantiteten ifråga måste fixeras. Det finns emellertid inget hinder för att i den formella lösningen anta hela den faktiska prisutvecklingen känd tillsammans med förhandsförväntningarna för denna prisutveckling. Därvid kan man erhålla en optimal sekvens av värdepapperskvantiteter, vilken både beror på förväntningarna och på den faktiska prisutvecklingen.

Lika väl som att välja $q_1, \ldots, q_{n-1}$ till placerarens »handlingsparametrar» hade vi kunnat välja $c_1, \ldots, c_{n-1}$. Restriktionen $q_n = 0$ skulle därvid ha implicerat $q_0 + (y_1 - c_1)/p_1 + \ldots + (y_n - c_n)/p_n = 0$, vilket tillåter eliminering av den sista periodens konsumtion såsom beroende av de tidigare periodernas. I stället för att välja något av de anförda alternativen skall vi införa nya variabler, betecknade $x_1, \ldots, x_n$, vilka uttrycker nettominskningar av innehavda värdepapperskvantiteter under respektive perioder. Sålunda är $x_t = q_{t-1} - q_t$ för $t = 1, \ldots, n$. Skälet till detta val är den matematiska bekvämligheten. När värdena på $x_1, \ldots, x_n$ är givna kan vi lätt erhålla motsvarande värden på $q_1, \ldots, q_n$ enligt villkoren $q_t = q_0 - x_1 - \ldots - x_t$ för $t = 1, \ldots, n$. Liksom förut måste vi sätta $q_n = 0$, varvid villkoret $q_n = q_0 - x_1 - \ldots - x_n = 0$ låter oss eliminera ett x_t såsom beroende av de övriga. Det logiskt naturliga med hänsyn till att en process i tiden diskuteras är att eliminera den sista periodens minskning i värdepappersinnehavet såsom bestämd av de tidigare förändringarna och av villkoret att värdepappersinnehavet skall vara noll efter de n periodernas slut, dvs. $x_n = q_0 - x_1 - \ldots - x_{n-1}$. Det bör observeras att vårt tal om nettominskningar i värdepappersinnehavet icke hindrar att

nettominskningarna kan vara negativa under vissa perioder så att värdepappersinnehavet vid sluten av dessa perioder är större än vid deras början.

I nyttofunktionen kan vi nu sätta in $c_t = y_t + p_t x_t$ för $t = 1, \ldots, n$ och $x_n = q_0 - x_1 - \ldots - x_{n-1}$. Detta ger

$$U(y_1 + p_1 x_1, \ldots, y_{n-1} + p_{n-1} x_{n-1}, y_n + p_n q_0 - p_n x_1 - \ldots - p_n x_{n-1}) = F(p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad (2\text{-}1)$$

För de olika partiella derivatorna gäller därvid

$$F_{x_t}(\,) = U_t(\,) \cdot p_t - U_n(\,) \cdot p_n \quad (t = 1, \ldots, n-1) \quad (2\text{-}2)$$

och

$$F_{x_r x_s}(\,) = U_{rs}(\,) \cdot p_r \cdot p_s - U_{rn}(\,) \cdot p_r \cdot p_n - U_{ns}(\,) \cdot p_n \cdot p_s + U_{nn}(\,) \cdot p_n \cdot p_n \quad \begin{cases} (r = 1, \ldots, n-1) \\ (s = 1, \ldots, n-1) \end{cases} \quad (2\text{-}3)$$

Förväntningarna representeras av en frekvensfunktion $\phi(p_1, \ldots, p_n)$. Funktionen har positivt värde vid alla de sekvenser av värdepappersspriser som antas vara möjliga enligt förväntningarna vid första periodens början, och värdet 0 för de övriga sekvenserna. Alla de sekvenser som är möjliga bildar tillsammans domänen D. Eftersom priset p_1 är känt vid första periodens början uppträder detta pris närmast som parameter i frekvensfunktionen. Ifall förväntningarna är elastiska påverkas formen på $\phi(\,)$ av värdet på p_1, men den multipla integralen av $\phi(\,)$ över variablerna $p_2, \ldots, p_n$ har värdet 1 för varje värde på p_1, dvs. $\int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_2 \ldots dp_n = 1$.

Placeraren skall nu finna optimala former på funktionerna $x_t = \psi_t(p_1, \ldots, p_t)$ för $t = 1, \ldots, n-1$ definierade över domänen D. Det optimala handlandet tar sig alltså uttrycket att för variablerna $x_1, \ldots, x_{n-1}$ finna olika optimala värden beroende på den faktiska prisutvecklingen fram till och med de perioder till vilka respektive variabler hör. Tar man hänsyn till dessa strategier $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ kommer nyttan att bero på strategifunktionernas former och på den faktiska prisutvecklingen enligt följande funktion

$$F(p_1, \ldots, p_n; \psi_1(\,), \ldots, \psi_{n-1}(\,)) \quad (2\text{–}4)$$

Tänkas strategierna vara givna beror nyttan uteslutande på sekvensen av värdepappersspriser och vi kan erhålla olika nyttovärden svarande mot olika prissekvenser. Vid givna strategier kan vi därför beräkna matematiska förväntan för nytta

$$\bar{U}(p_1; \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = \int \ldots \int_D F(p_1, \ldots, p_n; \psi_1(\,), \ldots, \psi_{n-1}(\,)) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_2 \ldots dp_n \quad (2\text{-}5)$$

Denna beror som synes på det aktuella priset och på strategifunktionernas former. För varje möjlig uppsättning av funktionsformer $\psi'_1, \ldots \psi'_{n-1}$ över domänen D erhålles ett värde på matematiska förväntan för nytta. Enligt »expected utility doctrine» gäller det att maximera värdet på $\bar{U}(\ )$. Sålunda gäller det att utvälja den uppsättning funktionsformer bland alla möjliga över D som leder till maximal matematisk förväntan för nytta.

Detta är inte något vanligt maximeringsproblem där det gäller att finna högsta värdet för en funktion av ett ändligt antal oberoende variabler. Om värdepappersprisera antas vara kontinuerligt variabla innehåller domänen D ett oändligt antal argumentpunkter eller möjliga sekvenser av värdepappersprisər. När maximeringen sker med avseende på formerna för strategifunktionerna över D gäller det att särskilt fastställa värden på $x_1, \ldots x_{n-1}$ vid varje möjlig sekvens av värdepappersprisər på att $\bar{U}(\ )$ blir maximal. $\bar{U}(\ )$ kan därför uppfattas som en funktion av ett oändligt antal oberoende variabler. Ett sådant samband som förknippar olika värden på $\bar{U}(\ )$ med olika funktionsformer $\psi'_1, \ldots \psi'_{n-1}$ kallas funktional, och den gren av matematiken som behandlar dylika funktionaler kallas variationskalkyl.[1]

För att lösa det föreliggande problemet skall vi anta att $\psi'_1, \ldots \psi'_{n-1}$ är kända och optimalt valda. Därefter definierar vi givna godtyckliga funktioner $x_t = \xi_t(p_1, \ldots p_t)$ över domänen D för $t = 1, \ldots n-1$ och bildar uttrycket

$$I(p_1; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \int \ldots \int_D F(p_1, \ldots, p_n; \psi_1(\ ) + \alpha_1 \cdot \xi_1(\ ), \ldots, \psi_{n-1}(\ ) + \alpha_{n-1} \cdot \xi_{n-1}(\ )) \times \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_2 \ldots dp_n \qquad (2\text{-}6)$$

[1] Observera således att $\bar{U}(\ )$ icke är någon »funktion av en funktion», vilken förknippar expected utility-värden med värden på $x_1, \ldots, x_{n-1}$, vilka i sin tur beror på priserna $p_1, \ldots, p_{n-1}$. Så var fallet beträffande funktionen $F(p_1, \ldots, p_n; \psi_1(\ ), \ldots, \psi_{n-1}(\ ))$. Men i och med att vi skriver $\bar{U}(p_1; \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$ vill vi markera att expected utility ej beror på funktions*värdena* $\psi_1(\ ), \ldots, \psi_{n-1}(\ )$ utan på funktions*formerna* $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$. I detta fall blir det viktigt att skilja på funktionernas former och på deras värden. Om man inte gör denna skillnad i beteckningssätt är det helt förkastligt att använda samma bokstavssymbol för de bägge sakerna. En funktionsform ψ'_t representerar en mängd av ordnade par bildade mellan värden på x_t och vektorer av värden på $p_1, \ldots, p_t$. När funktionen är kontinuerlig blir ψ'_t en oändlig mängd av ordnade par. Ett funktionsvärde $\psi_t(\ )$ avser däremot det värde på x_t som svarar mot en viss vektor av värden på $p_1, \ldots, p_t$. På samma sätt betecknar $\bar{U}(\ )$ ett visst värde på expected utility som svarar mot givna oändliga mängder $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$. Däremot är $\bar{U}$ funktionalens form eller en ganska komplicerad mängd av ordnade par bildade mellan å ena sidan olika expected utility-värden och å den andra olika utseenden för de oändliga mängderna $\psi'_1, \ldots \psi'_{n-1}$. Beträffande dessa problem se P. Suppes, »Introduction to Logic», 1957, s. 242 ff., samt H. Dickson, »Vad menar vi med orden 'variabel' och 'funktion'?», Ekonomisk Tidskrift nr 4 1962.

Observera att $I(\ )$ är en funktion av skalärerna $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ och ej någon funktional då strategierna $\psi_t(\ )$ och de godtyckliga funktionerna $\xi_t(\ )$ för $t = 1, \ldots, n-1$ är givna. För att strategierna skall vara optimalt valda måste nu gälla att

$$dI(p_1; 0, \ldots, 0) = 0 \tag{2-7}$$

$$d^2I(p_1; 0, \ldots, 0) < 0 \tag{2-8}$$

oberoende av de godtyckliga funktionsformerna $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ och för alla infinitesimala $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{n-1}$.[1]

Dessa villkor kan skrivas

$$\sum_{t=1}^{n-1} I_{\alpha_t}(p_1; 0, \ldots, 0) \cdot d\alpha_t = 0 \tag{2-9}$$

och

$$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} I_{\alpha_r \alpha_s}(p_1; 0, \ldots, 0) \cdot d\alpha_r \cdot d\alpha_s < 0 \tag{2-10}$$

för alla $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ och alla infinitesimala $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{n-1}$.

a) *Förstaordningsvillkoren*

Vi skall börja med att studera förstaordningsvillkoren. Uppenbarligen måste det gälla att

$$I_{\alpha_t}(p_1; 0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{för } t = 1, \ldots, n-1 \tag{2-11}$$

oberoende av $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Nu är emellertid

$$I_{\alpha_t}(\ ) = \int \ldots \int_D \xi_t(\ ) \cdot F_{x_t}(\ ) \cdot \phi(\ ) dp_2 \ldots dp_n \quad (t = 1, \ldots, n-1) \tag{2-12}$$

Eftersom $\xi_t(p_1, \ldots, p_t)$ endast beror på $p_1, \ldots, p_t$ kan vi skriva

$$I_{\alpha_t}(\ ) = \int \ldots \int_D \xi_t(\ ) \cdot \left[\int \ldots \int_D F_{x_t}(\ ) \cdot \phi(\ ) dp_{t+1} \ldots dp_n \right] dp_2 \ldots dp_t$$

$$(t = 1, \ldots, n-1) \tag{2-13}$$

där innehållet i klammern liksom $\xi_t(\ )$ är en funktion av $p_1, \ldots, p_t$. För att $I_{\alpha_t}(\ )$ skall vara lika med noll oberoende av formen på $\xi_t(\ )$ fordas att

$$\int \ldots \int_D F_{x_t}(\ ) \cdot \phi(\ ) dp_{t+1} \ldots dp_n = 0 \quad \text{för } t = 1, \ldots, n-1 \tag{2-14}$$

[1] Se R. Courant, »Differential and Integral Calculus», Vol. II, 1959, s. 491 ff.

gäller vid varje sekvens av priser $p_1, \ldots, p_t$ fram till och med den t:te perioden.

Eftersom integrationen i de härledda villkoren sker över variablerna $p_{t+1}, \ldots, p_n$ medan strategifunktionerna $\psi_1, \ldots, \psi_t$ som argument endast innehåller $p_1, \ldots, p_t$ kommer integralerna att bero på funktions*värdena* $\psi_1(\ ), \ldots, \psi_t(\ )$ men på funktions*formerna* $\psi_{t+1}, \ldots, \psi_{n-1}$ så att vi kan skriva

$$G^t(p_1, \ldots, p_t; \psi_1(\ ), \ldots, \psi_t(\ ), \psi_{t+1}, \ldots, \psi_{n-1})$$

$$= \int \ldots \int_D F_{x_t}(p_1, \ldots, p_n; \psi_1(\ ), \ldots, \psi_{n-1}(\ )) \cdot \phi(\ ) dp_{t+1} \ldots dp_n \qquad (2\text{-}15)$$

Villkoren

$$G^t(\ ) = 0 \qquad \text{för } t = 1, \ldots, n-1 \qquad (2\text{-}16)$$

ställer $(n-1)$ restriktioner på funktionsvärdet $\psi_1(\ )$ och på funktionsformerna $\psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, vilka sålunda determineras vid givna värden på den faktiska sekvensen av värdepapperspriser $p_1, \ldots, p_{n-1}$. När funktionsformerna är bestämda kan man självfallet vid kännedom om den faktiska prisutvecklingen beräkna den optimala sekvensen av minskningar i värdepappersinnehavet och följaktligen även den optimala sekvensen av under olika perioder innehavda värdepapperskvantiteter. Som synes beror denna optimala sekvens på både förväntningarna för värdepapperspriset och den faktiska prisutvecklingen.

b) Andraordningsvillkoren

Det sagda gäller under förutsättning av uppfyllda andraordningsvillkor, vilka vi nu måste undersöka närmare. Dessa villkor krävde att

$$d^2 I(\ ) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} I_{\alpha_r \alpha_s}(\ ) \cdot d\alpha_r \cdot d\alpha_s \qquad (2\text{-}17)$$

skulle vara definit negativ för alla infinitesimala $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{n-1}$ oberoende av $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Därvid är

$$I_{\alpha_r \alpha_s}(\ ) = \int \ldots \int_D \xi_r(\ ) \cdot \xi_s(\ ) \cdot F_{x_r x_s}(\ ) \cdot \phi(\ ) dp_2 \ldots dp_n \quad \begin{cases} (r = 1, \ldots, n-1) \\ (s = 1, \ldots, n-1) \end{cases} \qquad (2\text{-}18)$$

varvid det gäller att

$$d^2 I(\ ) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \left[\int \ldots \int_D \xi_r(\ ) \cdot \xi_s(\ ) \cdot F_{x_r x_s}(\ ) \cdot \phi(\ ) dp_2 \ldots dp_n \right] \cdot d\alpha_r \cdot d\alpha_s$$

$$= \int \ldots \int_D \left[\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} \xi_r(\ ) \cdot \xi_s(\ ) \cdot F_{x_r x_s}(\ ) \cdot d\alpha_r d\alpha_s \right] \cdot \phi(\ ) dp_2 \ldots dp_n \qquad (2\text{-}19)$$

Ett tillräckligt villkor för att $d^2I(\ )$ skall vara definit negativ är, eftersom ju $\phi(\ ) > 0$ över D, att

$$\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1} \xi_r(\ ) \cdot \xi_s(\ ) \cdot F_{x_r x_s}(\ ) \cdot d\alpha_r \cdot d\alpha_s < 0 \tag{2-20}$$

gäller för alla $p_1 \ldots, p_n$ inom D, för alla godtyckliga $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ och alla infinitesimala $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{n-1}$.

Det närmast föregående uttrycket är emellertid en kvadratisk form som genom »komplettering av kvadraten» kan skrivas

$$\sum_{t=1}^{n-1} \hat{a}_t \cdot z_t^2 \tag{2-21}$$

där de godtyckliga $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ och $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{n-1}$ endast förekommer i de kvadrerade uttrycken $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Därvid är[1]

$$\hat{a}_t = \frac{\begin{vmatrix} F_{x_1 x_1}(\ ) & \ldots & F_{x_1 x_t}(\ ) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{x_t x_1}(\ ) & \ldots & F_{x_t x_t}(\ ) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{x_1 x_1}(\ ) & \ldots & F_{x_1 x_{t-1}}(\ ) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{x_{t-1} x_1}(\ ) & \ldots & F_{x_{t-1} x_{t-1}}(\ ) \end{vmatrix}}$$

$$\text{för } t = 2, \ldots, n-1 \tag{2-22}$$

och

$$\hat{a}_1 = F_{x_1 x_1}(\ ) \tag{2-23}$$

Ifall $\hat{a}_t < 0$ för $t = 1, \ldots, n-1$ blir den kvadratiska formen negativ definit och andraordningsvillkoren för optimum är uppfyllda. Det sagda förutsätter tydligen att

$$A^t = (-1)^t \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1}(\ ) & \ldots & F_{x_1 x_t}(\ ) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{x_t x_1}(\ ) & \ldots & F_{x_t x_t}(\ ) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -F_{x_1 x_1}(\ ) & \ldots & -F_{x_1 x_t}(\ ) \\ \vdots & & \vdots \\ -F_{x_t x_1}(\ ) & \ldots & -F_{x_t x_t}(\ ) \end{vmatrix} > 0 \tag{2-24}$$

[1] Rörande denna procedur se P. A. Samuelson, »Foundations of Economic Analysis», 1961, s. 369 ff.

gäller för $t = 1, \ldots, n-1$. Denna determinant kan vi bygga på med två nya rader och två nya kolumner på följande vis[1]

$$A^t = -p_n^\circ \begin{vmatrix} 0 & -1/p_n & 0 \ldots 0 \\ -1/p_n & -U_{nn}(\,) & 0 \ldots 0 \\ -1 & -U_{1n}(\,)\cdot p_1 & -F_{x_1x_1}(\,) \ldots -F_{x_1x_t}(\,) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -U_{tn}(\,)\cdot p_t & -F_{x_tx_1}(\,) \ldots -F_{x_tx_t}(\,) \end{vmatrix} \quad (t = 1, \ldots, n-1) \tag{2-25}$$

Observera att vi förut har konstaterat att

$$F_{x_rx_s}(\,) = U_{rs}(\,)\cdot p_r \cdot p_s - U_{rn}(\,)\cdot p_r \cdot p_n - U_{ns}(\,)\cdot p_n \cdot p_s + U_{nn}(\,)\cdot p_n \cdot p_n \tag{2-26}$$

Värdena av determinanterna A^t ändras ej genom att vi lägger multipeln $(U_{ns}(\,)\cdot p_n \cdot p_s - U_{nn}(\,)\cdot p_n \cdot p_n)$ av den första kolumnen och multipeln p_n av den andra kolumnen till var och en av de övriga kolumnerna. Determinanten övergår då till

$$A^t = -p_n^\circ \begin{vmatrix} 0 & -1/p_n & -1 \ldots -1 \\ -1/p_n & -U_{nn}(\,) & -U_{n1}(\,)p_1 \ldots -U_{nt}(\,)p_t \\ -1 & -U_{1n}(\,)p_1 & -U_{11}(\,)p_1p_1 \ldots -U_{1t}(\,)p_1p_t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -U_{tn}(\,)p_t & -U_{t1}(\,)p_tp_1 \ldots -U_{tt}(\,)p_tp_t \end{vmatrix} =$$

$$= -p_1^\circ \cdot \ldots \cdot p_t^\circ \cdot p_n^\circ \begin{vmatrix} 0 & 1/p_n & 1/p_1 \ldots 1/p_t \\ 1/p_n & -U_{nn}(\,) & -U_{n1}(\,) \ldots -U_{nt}(\,) \\ 1/p_1 & U_{1n}(\,) & -U_{11}(\,) \ldots -U_{1t}(\,) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/p_t & -U_{tn}(\,) & -U_{t1}(\,) \ldots -U_{tt}(\,) \end{vmatrix} =$$

$$= -p_1^\circ \cdot \ldots \cdot p_t^\circ \cdot p_n^\circ \cdot B^t \tag{2-27}$$

Tydligen gäller villkoren $A^t > 0$ för $t = 1, \ldots, n-1$ under förutsättning att $B^t < 0$ för $t = 1, \ldots, n-1$.

[1] Beträffande denna metod se J. R. Hicks, »Value and Capital», 1957, s. 304 ff.

Den randade determinanten B^t är emellertid själv en kvadratisk form uttryckt i $1/p_n$ och $1/p_1, \ldots, 1/p_t$. Expansion ger

$$B^t = -\sum_{r=n,1}^{t}\sum_{s=n,1}^{t} C_{rs}^t \cdot 1/p_r \cdot 1/p_s \tag{2-28}$$

där

$$C^t = \begin{vmatrix} -U_{nn}(\,) & -U_{n1}(\,) \ldots -U_{nt}(\,) \\ -U_{1n}(\,) & -U_{11}(\,) \ldots -U_{1t}(\,) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ -U_{tn}(\,) & -U_{t1}(\,) \ldots -U_{tt}(\,) \end{vmatrix} \tag{2-29}$$

och C_{rs}^t är co-faktorn till elementet på den r:te raden och s:te kolumnen i determinanten C^t. Det är uppenbart att $B^t < 0$ för $t = 1, \ldots, n-1$ under förutsättning att villkoren

$$\sum_{r-n,1}^{t}\sum_{s=n,1}^{t} C_{rs}^t \cdot 1/p_r \cdot 1/p_s > 0 \tag{2-30}$$

gäller för $t = 1, \ldots, n-1$. Nu är dessa villkor uppfyllda oberoende av värdena på $p_1, \ldots, p_{n-1}$ ifall de kvadratiska formerna kan förutsättas vara definit positiva. Definit positiva är de under förutsättning att

$$C^t > 0 \qquad \text{för } t = 1, \ldots, n-1 \tag{2-31}$$

gäller.[1]

De slutligen härledda villkoren

$$C^t = (-1)^t \cdot \begin{vmatrix} U_{nn}(\,) & U_{n1}(\,) \ldots U_{nt}(\,) \\ U_{1n}(\,) & U_{11}(\,) \ldots U_{1t}(\,) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ U_{tn}(\,) & U_{t1}(\,) \ldots U_{tt}(\,) \end{vmatrix} > 0 \tag{2-32}$$

för $t = 1, \ldots, n-1$ betyder helt enkelt att nyttofunktionens andra differential

$$d^2U(\,) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} U_{rs}(\,) \cdot dc_r \cdot dc_s \tag{2-33}$$

är negativ definit eller att nyttofunktionen är »konvex ovanifrån», vilket svarar mot antagandet om riskaversion. Slutsatsen av det hela blir att andraordningsvillkoren för optimum alltid automatiskt är uppfyllda när riskaversion föreligger, och att den lösning vi tidigare erhöll verkligen motsvarar ett optimum.

[1] Beviset härför, som är ganska komplicerat, uttnyttjar satsen att den inversa matrisen till en definit positiv matris själv är definit positiv. Se härom R. Frisch, »Innledning til produksjonsteorien», 1962, s. 193–196.

3. Dynamisk programmering och additiv nyttofunktion

a) *Optimum*

Den matematiskt givna lösningen för optimiproblemet vid dynamisk planering är tyvärr något svår att handskas med på grund av de där förekommande funktionalerna. Emellertid kan vi med hjälp av metodiken för dynamisk programmering erhålla villkor som är lättare att tolka. Förutsätter vi ytterligare att nyttofunktionen kan skrivas i formen

$$U(\,) = U_1(c_1) + \ldots + U_n(c_n) \tag{3-1}$$

kommer lösningen att kunna göras successivt på ett mycket enkelt sätt. Under varje period gäller det att dela upp den från föregående period kvarblivna värdepapperskvantiteten i en del som säljs för att öka den aktuella konsumtionen och en del som behålles för att öka den potentiella konsumtionen för framtiden. I symboler uttryckt skall q_{t-1} delas upp mellan x_t och q_t. Naturligtvis kan x_t tänkas vara negativ om värdepapperskvantiteten skulle ökas under perioden i stället för minskas. På grund av nyttofunktionens form kan detta beslut fattas oberoende av de tidigare besluten. Genom att maximera sammanlagda expected utility för den aktuella perioden t och de följande perioderna $t+1,..,n$ kan man bestämma ett optimalt x_t för varje värde på q_{t-1} under förutsättning att handlandet för de följande perioderna med hänsyn till varje värde på $q_t = q_{t-1} - x_t$ redan är optimalt bestämt. Denna sammanlagda expected utility blir då helt enkelt en summa av expected utility för denna period och det maximala expected utility som erhålles för de följande perioderna under förutsättning av optimalt handlande. Det förstnämnda expected utility beror på x_t och det senare expected utility på $q_{t-1} - x_t$. Vid givet q_{t-1} kan man därför bestämma optimum för x_t när optimalproblemen för de följande perioderna är lösta. Genom att börja med den näst sista perioden och arbeta sig bakåt period för period kan problemet lösas successivt.[1]

Expected utility för näst sista och sista perioderna vid näst sista periodens början bestäms av ekvationen

$$\begin{aligned}
&\bar{U}_{n-1}(q_{n-2}, x_{n-1}; p_1, \ldots, p_{n-1}) \cdot \int_D \phi(p_1 \ldots, p_n) dp_n \\
&= \int_D [U_{n-1}(y_{n-1} + p_{n-1} x_{n-1}) - U_n(y_n + p_n q_{n-2} - p_n x_{n-1})] \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_n \\
&= U_{n-1}(y_{n-1} + p_{n-1} x_{n-1}) \cdot \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_n \\
&+ \int_D U_n(y_n + p_n q_{n-2} - p_n x_{n-1}) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_n
\end{aligned} \tag{3-2}$$

[1] Rörande denna teknik se R. Bellman, »Dynamic Programming», 1957, s. 7 ff.

För varje värde på q_{n-1} söker man maximala värdet av $\bar{U}_{n-1}(\ )$ med avseende på x_{n-1}, Eftersom faktorn $\int_D \phi(p_1, \ldots, p_n)dp_n$ är oberoende av x_{n-1} betyder det sagda att man även söker det maximala värdet av hela uttrycket ovan. Förstaordningsvillkoret för maximum kan, såsom lätt inses, skrivas

$$p_{n-1} \cdot U'_{n-1}(y_{n-1} + p_{n-1}x_{n-1})$$

$$= \int_D p_n \cdot U'_n(y_n + p_n q_{n-2} - p_n x_{n-1}) \cdot \phi(\ )dp_n / \int_D \phi(\ )dp_n \qquad (3\text{-}3)$$

Denna ekvation determinerar ett värde på x_{n-1} vid varje värde på q_{n-2} och varje kombination av värden på $p_1, \ldots, p_{n-1}$. Ekvationen utsäger helt enkelt att marginal utility av att minska värdepappersmängden med en enhet under den näst sista perioden skall vara lika med expected marginal utility enligt förväntningarna vid den näst sista periodens början av att i stället minska värdepappersmängden under den sista perioden med denna enhet. Denna sistnämnda expected marginal utility beror självfallet på prisutvecklingen fram till och med den näst sista perioden i samma mån som förväntningarna för den sista periodens värdepapperspris beror på den tidigare prisutvecklingen.

Vi definierar nu funktionen

$$f_{n-1}(q_{n-2};\ p_1 \ldots, p_{n-1}) = \underset{x_{n-1}}{\text{Max}} \left[\bar{U}_{n-1}(\ ) \int_D \phi(\ )dp_n \right] \qquad (3\text{-}4)$$

Denna funktion erhålles genom att i uttrycket för $\bar{U}_{n-1}(\ ) \cdot \int_D \phi(\ )dp_n$ ovan eliminera x_{n-1} med hjälp av förstaordningsvillkoret för maximum.

Såsom nästa steg beräknar vi expected utility för perioderna $(n-2)$; $(n-1)$; och n enligt förväntningarna vid $(n-2)$:a periodens början.

$$\bar{U}_{n-2}(q_{n-3}, x_{n-2};\ p_1, \ldots, p_{n-2}) \cdot \iint_D \phi(p_1, \ldots, p_n)dp_{n-1}dp_n$$

$$= \iint_D U_{n-2}(y_{n-2} + p_{n-2}x_{n-2}) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n)dp_{n-1}dp_n$$

$$+ \int_D f_{n-1}(q_{n-2};\ p_1, \ldots, p_{n-1})dp_{n-1}$$

$$= U_{n-2}(y_{n-2} + p_{n-2}x_{n-2}) \cdot \iint_D \phi(p_1, \ldots, p_n)dp_{n-1}dp_n$$

$$+ \int_D f_{n-1}(q_{n-3} - x_{n-2};\ p_1, \ldots, p_{n-1})dp_{n-1} \qquad (3\text{-}5)$$

Liksom forut galler det att maximera expected utility eller alternativt hela det föregående uttrycket, som är lika med produkten av expected utility och faktorn $\iint_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_{n-1} dp_n$. Villkoret lyder

$$p_{n-2} \cdot \tilde{U}'_{n-2}(y_{n-2} + p_{n-2} x_{n-2}) = \int_D f'_{n-1}(q_{n-3} - x_{n-2}; p_1, \ldots, p_{n-1}) dp_{n-1} \iint_D \phi(\,) dp_{n-1} dp_n \qquad (3\text{-}6)$$

där $f'_{n-1}(\,)$ betecknar den partiella derivatan av $f_{n-1}(\,)$ med avseende på q_{n-2}. Detta villkor utsäger att marginal utility av att minska värdepappersinnehavet under den $(n-2)$:a perioden med en enhet i avsikt att öka den omedelbara konsumtionen skall vara lika med expected marginal utility enligt förväntningarna under $(n-2)$:a perioden av att avstå från den omedelbara minskningen i värdepappersinnehavet och i stället fördela denna minskning mellan de bägge sista perioderna på i varje situation optimalt sätt. Villkoret bestämmer ett optimalt värde på x_{n-2} vid varje värde på q_{n-3} och varje kombination av värden på $p_1, \ldots, p_{n-2}$. Genom att sedan eliminera x_{n-2} i $\tilde{U}_{n-2}(q_{n-3}, x_{n-2}; p_1, \ldots, p_{n-2})$ erhåller vi

$$f_{n-2}(q_{n-3}; p_1, \ldots, p_{n-2}) = \underset{x_{n-2}}{\text{Max}} \left[\tilde{U}_{n-2}(\,) \cdot \iint_D \phi(\,) dp_{n-1} dp_n \right] \qquad (3\text{-}7)$$

Sålunda förfares period för period så att man alltid erhåller ett optimalt värde på minskningen av värdepappersinnehavet för varje givet värde på den från föregående period »ärvda» initiella kvantiteten värdepapper. Därvid förutsättes för varje period att man under de följande perioderna förfar i varje situation, bestämd av det initiella värdepappersinnehavet och den föregående prisutvecklingen, på det optimala sätt som lösningens redan genomförda steg föreskriver. Under varje period maximeras

$$\tilde{U}_t(q_{t-1}, x_t; p_1, \ldots, p_t) \cdot \int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_{t+1} \ldots dp_n$$

$$= U_t(y_t + p_t x_t) \cdot \int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_{t+1} \ldots dp_n$$

$$+ \int_D f_{t+1}(q_{t-1} - x_t; p_1, \ldots, p_{t-1}) dp_{t+1} \qquad (3\text{-}8)$$

Detta leder till villkoret

$$p_t \cdot U'_t(y_t + p_t x_t) = \int_D f'_{t+1}(q_{t-1} - x_t; p_1, \ldots, p_{t-1}) dp_{t+1} \int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_{t+1} \ldots dp_n \qquad (3\text{-}9)$$

som bestämmer x_t vid olika q_{t-1} och $p_1, \ldots, p_t$. Substitution av x_t i $\bar{U}_t(\ )$ ger sedan

$$f_t(q_{t-1}; p_1, \ldots, p_t) = \max_{x_t} \left[\bar{U}_t(\ ) \cdot \int \ldots \int_D \phi(\ ) dp_{t-1} \ldots dp_n \right] \qquad (3\text{-}10)$$

Under varje period bestäms det optimala handlingssättet genom ett marginellt val mellan att omedelbart minska värdepappersinnehavet och att i stället fördela minskningen över de följande perioderna på ett i varje situation optimalt sätt. Marginal utility för det förra alternativet skall i optimum vara lika med expected marginal utility för det senare alternativet enligt förväntningarna under den ifrågavarande perioden.

På detta sätt fortfares tills $f_2(q_1; p_1, p_2)$ blivit härledd. Därefter kan expected utility för samtliga perioder ställas upp.

$$\bar{U}_1(q_0, x_1; p_1) \cdot \int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_2 \ldots dp_n = U_1(y_1 + p_1 x_1)$$

$$\times \int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_2 \ldots dp_n + \int_D f_2(q_0 - x_1; p_1, p_2) dp_2 \qquad (3\text{-}11)$$

Därvid beror expected utility endast på den initiellt innehavda värdepappersmängden, på den under första perioden genomförda minskningen i denna mängd, och på det aktuella värdepapperspriset. Den sista optimeringen gäller valet av x_1 så att $\bar{U}_1(\ )$ maximeras, varvid villkoret $p_1 \cdot U_1'(\ ) = \int_D f_2'(\ ) dp_2 / \int \ldots \int_D \phi(\ ) dp_2 \ldots dp_n$ måste vara uppfyllt. Eftersom $\int \ldots \int_D \phi(\ ) dp_2 \ldots dp_n = 1$ kan villkoret även formuleras

$$p_1 \cdot U_1'(\ ) = \int_D f_2'(\ ) dp_2 \qquad (3\text{-}12)$$

varvid marginal utility av att minska den första periodens värdepappersinnehav skall sammanfalla med expected marginal utility av att fördela minskningen optimalt mellan de följande perioderna. Vad som är optimalt bestäms därvid av lösningens tidigare steg. Genom detta villkor bestäms slutligen ett optimalt värde på x_1.

Men i och med att x_1 är känt kan vi beräkna $q_1 = q_0 - x_1$. Följaktligen är i funktionen $\bar{U}_2(q_1, x_2; p_1, p_2)$ priset p_1 och kvaniteten q_1 kända. Vid olika värden på p_2 erhålles olika optimala värden på x_2 som maximerar $\bar{U}_2(\ )$. Ett givet värde på x_2 låter i sin tur bestämma $q_2 = q_1 - x_2$. På detta sätt fortfar man och bestämmer x_t för varje period så att $\bar{U}_t(q_{t-1}, x_t, p_1, \ldots, p_t)$ maximeras. Varje periods optimala minskning av värdepappersinnehavet kommer därvid att bero på den vid periodens början initiellt innehavda

kvantiteten och på den realiserade prisutvecklingen fram till och med perioden i fråga. När hela den realiserade prisutvecklingen är given erhålles sålunda en bestämd sekvens av värden på $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Denna uppnådda förenkling av problemställningen är mycket mer attraktiv än det generella fallet. Det antagande om nyttofunktionen som det hela bygger på, betyder helt enkelt att om samma nyttofunktion skulle användas för optimal konsumtionsfördelning i tiden vid perfect foresight, så skulle vid given prisutveckling den optimala konsumtionsfördelningen inom varje kollektion bland de senare perioderna bli oberoende av de föregående periodernas konsumtion. Sagda oberoende gäller naturligtvis under förutsättning av att det är en given sekvens av inkomster och en given förmögenhet som skall fördelas. Eftersom de tidigare periodernas konsumtion bestämmer storleken av den från dessa kvarlämnade förmögenheten, kommer konsumtionsfördelningen mellan de senare perioderna självfallet att påverkas på denna väg. Antagandet om additiv nyttofunktion betyder ingalunda att den optimala konsumtionsfördelningen ej beror på den disponibla förmögenheten, utan att fördelningen ej beror på de tidigare periodernas konsumtion när den för de senare perioderna disponibla förmögenheten tänks vara given.

På samma sätt kommer den additiva nyttofunktionen att vid osäkerhet leda till en optimal konsumtionsfördelning mellan varje kollektion av senare perioder som är oberoende av de tidigare periodernas konsumtion under förutsättning att den från dessa kvarlämnade förmögenheten antas vara given. Däremot länkas det optimala handlandet under varje period ihop med handlandet under de förgångna perioderna via storleken av den från dessa kvarlämnade förmögenheten. Dessutom beror, såsom vi har sett, det optimala beslutet för varje period på den faktiska utvecklingen av värdepapperspriserna fram till och med den aktuella perioden. Av det sagda torde framgå att den nu införda förenklingen är ganska rimlig om man vill ge det diskuterade problemet vid dynamisk planering hanterliga proportioner.

b) *Andraordningsvillkoren*

Låt oss nu betrakta de andraordningsvillkor som måste vara uppfyllda för att de uppställda marginella villkoren skall leda till optimala lösningar. I varje steg av lösningen söker man $f_t(q_{t-1}; p_1, \ldots, p_t) =$

$$\underset{x_t}{\text{Max}} \left\{ U_t(y_t + p_t x_t) \cdot \int \ldots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \ldots dp_n + \int_D f_{t+1}(q_{t-1} - x_t; p_1, \ldots, p_{t+1}) dp_{t+1} \right\} \qquad (3\text{-}13)$$

De marginella förstaordningsvillkoren innebär att innehållet i klammern skall ha en partiell förstaderivata med avseende på x_t vars värde är lika med noll. Andraordningsvillkoret innebär att den partiella andraderivatan av innehållet i klammern med avseende på x_t skall vara negativ, dvs. att

$$p_t^2 \cdot U_t''(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D f_{t+1}''(\,) dp_{t+1} < 0 \qquad (3\text{-}14)$$

Vi kan här även reproducera förstaordningsvillkoren som löd

$$p_t \cdot U_t'(\,) \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n - \int_D f_{t+1}'(\,) dp_{t+1} = 0 \qquad (3\text{-}15)$$

Differentiering av detta förstaordningsvillkor med avseende på x_t och q_{t-1} ger

$$\frac{\partial x_t}{\partial q_{t-1}} = \frac{\int_D f_{t+1}''(\,) dp_{t+1}}{p_t^2 \cdot U_t''(\,) \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D f_{t+1}''(\,) dp_{t+1}} \qquad (3\text{-}16)$$

Genom derivering av uttrycket som definierar $f_t(\,)$ ovan med avseende på q_{t-1} erhålles

$$f_t'(\,) = \left[p_t \cdot U_t'(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n - \int_D f_{t+1}'(\,) dp_{t+1} \right] \cdot \frac{\partial x_t}{\partial q_{t-1}} + \int_D f_{t+1}'(\,) dp_{t+1} \qquad (3\text{-}17)$$

Men eftersom koefficienten framför $\partial x_t / \partial q_{t-1}$ enligt förstaordningsvillkoren skall vara lika med noll erhålles

$$f_t'(\,) = \int_D f_{t+1}'(\,) dp_{t+1} \qquad (3\text{-}18)$$

Derivering ytterligare en gång med avseende på q_{t-1} ger

$$f_t''(\,) = \int_D f_{t+1}''(\,) dp_{t+1} \cdot \left[1 - \frac{\partial x_t}{\partial q_{t-1}} \right] \qquad (3\text{-}19)$$

Efter insättning av $\partial x_t / \partial q_{t-1}$ övergår uttrycket till

$$f_t''(\,) = \frac{p_t^2 \cdot U_t''(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n \cdot \int_D f_{t+1}''(\,) dp_{t+1}}{p_t^2 \cdot U_t''(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D f_{t+1}''(\,) dp_{t+1}} \qquad (3\text{-}20)$$

Betrakta nu detta uttryck. Om vi kan förutsätta att $U_t''(\ ) < 0$ och $f_{t-1}''(\ ) < 0$, varför även $\int_D f_{t-1}'' dp_{t-1} < 0$, följer att $f_t''(\ ) < 0$. Emellertid definieras $f_n(q_{n-1}; p_1, \ldots, p_n) = U_n(y_n + p_n \cdot q_{n-1}) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n)$. Sålunda blir $f_n''(\ ) = U_n''(\ ) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n)$. Om alltså $U_n''(\ ) < 0$ följer att $f_n''(\ ) < 0$. Om dessutom $U_{n-1}''(\ ) < 0$, följer av det ovan sagda att $f_{n-1}''(\ ) < 0$. Man kan därför steg för steg visa att $f_t''(\ ) < 0$ för $t = 1, \ldots, n-1$ om det gäller att $U_t''(\ ) < 0$ för $t = 1, \ldots, n$. Men detta betyder i sin tur att andraordningsvillkoren automatiskt är uppfyllda när $U_t''(\ ) < 0$ för $t = 1, \ldots, n$.

Det sagda stämmer väl överens med det som tidigare sagts i samband med det generella fallet, dvs. att andraordningsvillkoren automatiskt skulle vara uppfyllda när nyttofunktionen var »konvex ovanifrån». Denna konvexitet betydde matematiskt att andradifferentialen d^2U skulle vara definit negativ med avseende på variationer i $c_1, \ldots, c_n$ och ekonomiskt att riskaversion skulle föreligga. Eftersom vi vid additiv nyttofunktion erhåller andradifferentialen

$$d^2U = U_1''(\ ) \cdot (dc_1)^2 + \ldots + U_n''(\ ) \cdot (dc_n)^2 \tag{3-21}$$

som en summa av kvadratiska termer med koefficienterna $U_1''(\ ), \ldots, U_n''(\ )$ är det uppenbart att definit negativitet för andradifferentialen är liktydig med negativitet för koefficienterna.

Slutsatsen av det hela blir att riskaversion implicerar att andraordningsvillkoren är uppfyllda.

c) *Komparativ statik*

Vi kan nu avsluta diskussionen av specialfallet med att undersöka hur en förändring av det aktuella priset p_1 kan förväntas påverka den optimala minskning av värdepappersinnehavet x_1, som skall genomföras under den löpande perioden. Första ordningens villkor för att x_1 skulle vara optimalt avvägt vid givna q_0, p_1 och givna handlingsregler för de följande perioderna kunde skrivas:

$$p_1 \cdot U_1'(y_1 + p_1 x_1) = \int_D f_2'(q_0 - x_1; p_1, p_2) dp_2 \tag{3-22}$$

Därvid betecknade $\int_D f_2'(q_1; p_1, p_2) dp_2$ det under första perioden beräknade expected marginal utility av att öka den efter första periodens slut kvarlämnade värdepappersmängden q_1 med en enhet, varvid sekvensen av de framtida besluten för $x_2, \ldots, x_{n-1}$ redan var optimalt bestämd vid varje värde på q_1 och varje sekvens av värdepapperspriser $p_2, \ldots, p_{n-1}$. Villkoret säger att marginal utility av att minska värdepappersinnehavet under den första perioden för att i motsvarande mån öka dess konsumtion skall vara lika med expected marginal utility av att i stället öka den vid första perio-

dens slut kvarlämnade värdepappersmängden med en enhet. Mot detta förstaordningsvillkor svarar följande andraordningsvillkor:

$$p_1^2 \cdot U_1''(y_1 + p_1 x_1) + \int_D f_2''(q_0 - x_1, p_1, p_2) dp_2 < 0 \tag{3-23}$$

Därvid betecknar $f_2''(\ )$ den partiella andraderivatan av $f_2(\ )$ med avseende på $q_1 = (q_0 - x_1)$.

Härnäst differentierar vi förstaordningsvillkoret med avseende på p_1 och x_1. Detta ger:

$$U_1'(\ )dp_1 + p_1 x_1 \cdot U_1''(\ )dp_1 + p_1^2 \cdot U_1''(\ )dx_1 =$$

$$- \left[\int_D f_2''(\ )dp_2\right] dx_1 + \left[\int_D \frac{\partial}{\partial p_1} f_2'(\ )dp_2\right] dp_1 \tag{3-24}$$

Efter omflyttning av termerna erhålles

$$\frac{dx_1}{dp_1} = - \frac{U_1'(\ ) + p_1 x_1 \cdot U_1''(\ ) - \int_D \frac{\partial}{\partial p_1} f_2'(\ )dp_2}{p_1^2 U_1''(\ ) + \int_D f_2''(\ )dp_2} \tag{3-25}$$

Från andraordningsvillkoret kan vi sluta att nämnaren skall vara negativ. Härav följer att dx_1/dp_1 har samma tecken som täljaren. I denna betecknar $U_1'(\ )$ gränsnyttan av ökad omedelbar konsumtion och är följaktligen positiv när mättnad ej har inträtt. När riskaversion föreligger och sålunda andraordningsvillkoren är uppfyllda blir $U_1''(\ )$ negativ. Nu är emellertid $p_1 x_1 = c_1 - y_1$. Detta medför att $U_1'(\ ) + p_1 x_1 U_1''(\ )$ alltid är positiv när $c_1 < y_1$, dvs. när värdepappersmängden skall ökas under den första perioden, men kan vara negativ när $c_1 > y_1$, dvs. när värdepappersmängden skall minskas. Om den tredje termen i täljaren kan försummas betyder det sagda att en ökning av det aktuella värdepapperspriset alltid reducerar villigheten att inneha värdepapper när $c_1 < y_1$, medan villigheten att inneha värdepapper kan ökas när $c_1 > y_1$.

Den tredje termen anger hur expected marginal utility av att öka den vid första periodens slut kvarlämnade värdepappersmängden påverkas av den första periodens värdepapperspris. Den enda länken mellan denna expected marginal uility och det aktuella värdepapperspriset består i det aktuella prisets påverkan på förväntningarna för de framtida priserna. Ifall förväntningarna är helt oelastiska kan tydligen tredje termen försummas och det föregående resonemanget gäller oförändrat. Om däremot förväntningarna

är elastiska så att högre värdepappersspriser i framtiden blir mera sannolika än förut när det aktuella priset stiger, då kan expected marginal utility av att öka den efter första perioden kvarlämnade värdepappersmängden komma att stiga med det stigande aktuella priset. Elasticitet i förväntningarna kan sålunda öka villigheten att inneha värdepapper när deras pris stiger. Resultatet blir att efterfrågan på värdepapper reduceras av stigande värdepappersspris när den aktuella perioden optimala konsumtion är mindre än dess inkomst och när förväntningarna är oelastiska, medan efterfrågan kan stimuleras av stigande pris när konsumtionen överstiger inkomsten och förväntningarna är elastiska.

Att prishöjningen tenderar reducera värdepappersefterfrågan när konsumtionen understiger inkomsten och stimulera efterfrågan när konsumtionen överstiger inkomsten förefaller mycket rimligt, eftersom man i det förra fallet köper värdepapper varvid prishöjningen är en nackdel och i det senare fallet säljer dem varvid prishöjningen är en fördel. Det är känt fenomen från den riskfria teorin för flerperiodskonsumtion att inkomsteffekten av ett höjt värdepappersspris (=sänkt ränta) tenderar att öka värdepappersinnehavet när konsumenten i fråga sparar och minska innehavet när konsumenten i fråga lånar. Det sagda gäller under förutsättning att ingen periods konsumtion regarerar som »inferior good». Nu har vi genom antagandet om den additiva nyttofunktionen i själva verket abstraherat från möjligheten att någon periods konsumtion är »inferior good».

Låt oss undersöka hur x_1 påverkas av y_1. Differentiering av förstaordningsvillkoret ger

$$p_1^2 \cdot U_1''(\,)dx_1 + p_1 \cdot U_1''(\,)dy_1 = -\left[\int_D f_2''(\,)dp_2\right]dx_1 \tag{3-26}$$

eller

$$\frac{dx_1}{dy_1} = -\frac{p_1 \cdot U_1''(\,)}{p_1^2 U_1''(\,) + \int_D f_2''(\,)dp_2} \tag{3-27}$$

Eftersom vid riskaversion både täljare och nämnare är negativa kommer en ökning av den aktuella inkomsten alltid att minska x_1, dvs. öka obligationsinnehavet $q_1 = q_0 - x_1$.

Vi kan nu i stället se hur x_1 påverkas av den initiella mängden av värdepapper q_0. Differentiering av förstaordningsvillkoret ger

$$p_1^2 \cdot U_1''(\,)dx_1 = \left[\int_D f_2''(\,)dp_2\right]dq_0 - \left[\int_D f_2''(\,)dp_2\right]dx_1 \tag{3-28}$$

eller
$$\frac{dx_1}{dq_0} = \frac{\int_D f_2''(\,)dp_2}{p_1^2 U_1''(\,) + \int_D f_2''(\,)dp_2} \tag{3-29}$$

Som synes blir
$$-p_1 \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dx_1}{dq_0} = 1 \tag{3-30}$$

så att
$$\frac{dx_1}{dq_0} = 1 + p_1 \cdot \frac{dx_1}{dy_1} \tag{3-31}$$

Eftersom $q_1 = q_0 - x_1$ blir $dq_1/dq_0 = 1 - dx_1/dq_0$ och $dq_1/dy_1 = -dx_1/dy_1$. Således erhåller vi

$$\frac{dq_1}{dq_0} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{dq_1}{dy_1} \tag{3-32}$$

vilket betyder att den optimala kvantiteten obligationer som skall lämnas kvar efter första periodens slut påverkas lika starkt av förändringar i den första periodens inkomst och i värdet av denna periods initiella värdepapperskvantitet, något som självfallet måste gälla.

Vi har sett att den andra termen i uttrycket för dx_1/dp_1 kan tolkas som en inkomsteffekt vars tecken är motsatt tecknet för x_1. Den tredje termen är såsom vi även har konstaterat en effekt som anger resultatet av förändringen i förväntningarna. Den första termen bör följaktligen kunna tolkas som en substitutionseffekt. Antag därför att förväntningarna är oelastiska och att p_1 stiger samtidigt som y_1 erhåller en kompensation för att hålla expected utility

$$U_1(y_1 + p_1 x_1) + \int_D f_2(q_0 - x_1; p_1, p_2)dp_2 \tag{3-33}$$

konstant. Det nödiga sambandet mellan dy_1 och dp_1 vid oelastiska förväntningar, dvs. givet p_1, erhålles genom differentiering

$$U_1'(\,) \cdot (dy_1 + p_1 dx_1 + x_1 dp_1) - \left[\int_D f_2'(\,)dp_2\right] dx_1 = 0 \tag{3-34}$$

Förstaordningsvillkoret kräver emellertid att $U_1'(\,) \cdot p_1 = \int_D f_2'(\,)dp_2$, varav följer:

$$U_1'(\,) \cdot (dy_1 + x_1 dp_1) = 0 \tag{3-35}$$

eller då $U_1'(\,) \neq 0$ att

$$\frac{dy_1}{dp_1} = -x_1 \tag{3-36}$$

Substitutionseffekten blir sålunda vid oelastiska förväntningar och inkomstkompensation

$$-\frac{U_1'(\ )+p_1x_1\cdot U_1''(\ )}{p_1^2U_1''(\ )+\int_D f_2''(\ )dp_2}+x_1\cdot\frac{p_1\cdot U_1''(\ )}{p_1^2U_1''(\ )+\int_D f_2''(\ )dp_2}$$

$$=-\frac{U_1'(\ )}{p_1^2U_1''(\ )+\int_D f_2''(\ )dp_2} \tag{3-37}$$

vilket just är första termen i uttrycket för $dx_1|dp_1$ ovan.

d) *Exkurs: Förväntningseffekten vid Markov-processer*

En avsevärd förenkling av formlerna i den dynamiska programmeringen uppnås ifall förväntningarna för värdepappersprisets utveckling förutsätts ha formen av Markov-processer. Det sagda betyder att förväntningarna $\phi(p_1,\ldots,p_n)$, eller rättare i betingad form $\phi(p_2,\ldots,p_n|p_1)$, kan skrivas:

$$\prod_{t=2}^{n}\phi(p_t|p_{t-1})=\phi(p_2|p_1)\cdot\phi(p_3|p_2)\cdot\ldots\cdot\phi(p_n|p_{n-1}) \tag{3-38}$$

Markov-processen innebär två förenklande antaganden. Dels antas förväntningarna för värdepapperspriset under en viss period endast bli direkt påverkade av värdepapperspriset under närmast föregående period. Dels är de betingade frekvensfunktionerna $\phi(p_t|p_{t-1})$ desamma för varje periods förväntade värdepapperspris p_t vid sammanfallande värden på respektive närmast föregående perioders värdepapperspriser p_{t-1}, dvs. funktionen $\phi(p_t|p_{t-1})$ är densamma för alla $t=2,\ldots,n$. Det förefaller ganska rimligt att förenkla förutsättningarna på detta sätt så att den under längre tid förvärvade erfarenheten rörande värdepappersprisernas utveckling visserligen kommer till uttryck i det sätt på vilket funktionen ϕ genereras vid olika värden på p_{t-1}, men förväntningarna för den t:te perioden direkt endast påverkas av förhållandena under den $(t-1)$:a perioden. Vidare är det ju även sannolikt att förväntningarna i så fall blir desamma vid lika förhållanden under närmast föregående period antingen det gäller en nära eller en avlägsen framtid. Det bör särskilt observeras att det sagda ej utgör något hinder för tilltagande osäkerhet i förväntningarna med avlägsnare framtid. Visserligen är osäkerheten densamma för perioden t vid ett givet p_{t-1} antingen t hör till en nära eller till en avlägsen framtid, men i det senare fallet föregås perioden t av många perioder för vilka osäkerhet råder så att den ackumulerade osäkerheten blir större i detta fall.

Formlerna för det t:te stadiet av den dynamiska programmeringen lyder därvid:

$$\bar{U}_t(q_{t-1}, x_t; p_t)$$

$$= U_t(y_t + p_t x_t) + \int_D \bar{\bar{U}}_{t+1}(q_{t-1} - x_t; p_{t+1}) \cdot \phi(p_{t+1} | p_t) dp_{t+1} \qquad (3\text{-}39)$$

och

$$\bar{\bar{U}}_t(q_{t-2} - x_{t-1}; p_t) = \bar{\bar{U}}_t(q_{t-1}, p_t) = \operatorname*{Max}_{x_t} \bar{U}_t(q_{t-1}, x_t; p_t) \qquad (3\text{-}40)$$

Den nedre formeln låter oss från den under t:te perioden beräknade »expected utility» $\bar{U}_t(\ )$ — vilken beror på den från föregående period kvarlämnade värdepappersmängden q_{t-1}, på den under perioden genomförda minskningen x_t av denna mängd, och på det aktuella värdepapperspriset p_t — beräkna det maximala värdet $\bar{\bar{U}}_t(\ )$ på denna expected utility vid varje initiellt värde pappersinnehav q_{t-1} och varje aktuellt värdepappersprips p_t. I funktionen $\bar{\bar{U}}_t(\ )$ har som synes x_t eliminerats genom förutsättningen att x_t vid varje kombination av värden på q_{t-1} och p_t skall anpassas så att $\bar{U}_t(\ )$ maximeras. Den övre formeln låter oss från kännedom om funktionen för maximala »expected utility» under en viss period beräkna »expected utility» under närmast föregående period. De bägge formlerna sammantagna är således tillräckliga för hela programmeringsproceduren när vi känner $\bar{\bar{U}}_n(q_{n-2} - x_{n-1}; p_n)$. Emellertid gäller

$$\bar{\bar{U}}_n(\ ) = U_n(y_n + p_n q_{n-2} - p_n x_{n-1}) \qquad (3\text{-}41)$$

varför kännedom om nyttofunktionens additiva element

$$U_t(c_t) \quad (t = 1, \ldots, n) \qquad (3\text{-}42)$$

och om förväntningarna

$$\phi(p_t | p_{t-1}) \quad (t = 2, \ldots, n) \qquad (3\text{-}43)$$

låter oss successivt med början från slutet bestämma »expected utility»-funktionerna

$$\bar{U}_t(q_{t-1}, x_t; p_t) \quad (t = 1, \ldots, n) \qquad (3\text{-}44)$$

I varje stadium maximeras $\bar{U}_t$ med avseende på variationer av x_t, varför villkoren

$$\frac{\partial}{\partial x_t} \bar{U}_t(q_{t-1}, x_t; p_t)$$

$$= p_t \cdot U_t'(y_t + p_t x_t) - \int_D \bar{\bar{U}}_{t+1}'(q_{t-1} - x_t; p_{t+1}) \cdot \phi(p_{t+1} | p_t) dp_{t+1} = 0 \qquad (3\text{-}45)$$

och

$$\frac{\partial^2}{\partial x_t^2}\bar{U}_t(q_{t-1}, x_t; p_t)$$

$$= p_t^2 \cdot U_t''(y_t + p_t x_t) + \int_D U_{t+1}''(q_{t-1} - x_t; p_{t+1}) \cdot \phi(p_{t+1} | p_t) dp_{t+1} < 0 \quad (3\text{-}46)$$

måste gälla för $t = 1, \ldots, n-1$. Därvid betecknas som förut $U_{t-1}'(\,) = (\partial/\partial q_t)\bar{U}_{t+1}(\,)$ och $U_{t+1}''(\,) = (\partial^2/\partial_t^2)\bar{U}_{t+1}(\,)$. Med hjälp av förstaordningsvillkoret för det t:te stadiet kan det optimala värdet på x_t beräknas vid givna q_{t-1} och p_t. Eftersom emellertid $q_t = q_{t-1} - x_t$ kan man vid kännedom om q_0 och $p_1, \ldots, p_n$ beräkna hela sekvenserna av värden på $x_1, \ldots, x_n$ eller $q_1, \ldots, q_n$ eller $c_1, \ldots, c_n$.

Genom differentiering av det t:te stadiets förstaordningsvillkor kan vi finna hur en förändring ev det aktuella värdepapperspriset p_t påverkar periodens optimala minskning av värdepappersinnehavet x_t. Det differentierade villkoret lyder:

$$\left[U_t'(\,) + p_t x_t \cdot U_t''(\,) - \int_D \bar{\bar{U}}_{t+1}'(\,) \cdot \phi'(\,) dp_{t+1}\right] \cdot dp_t =$$

$$- \left[p_t^2 \cdot U_t''(\,) + \int_D \bar{\bar{U}}_{t+1}''(\,) \cdot \phi(\,) dp_{t+1}\right] \cdot dx_t \quad (3\text{-}47)$$

Klammerns innehåll i ekvationens senare led har negativt värde enligt andraordningsvillkoret. I ekvationens tidigare led är $U_t'(\,) > 0$ och $U_t''(\,) < 0$. Dessa svarar återigen mot de vanliga substitutions- och inkomsteffekterna. Huruvida substitutionseffekten förstärks eller motverkas av inkomsteffekten beror på om x_t har negativt eller positivt värde, dvs. på om värdepappersinnehavet ökar eller minskar under perioden. Det intressanta är emellertid förväntningseffekten vars tecken är detsamma som tecknet för

$$\int_D \bar{\bar{U}}_{t+1}'(q_t; p_{t+1}) \cdot \phi'(p_{t+1} | p_t) dp_{t+1} \quad (3\text{-}48)$$

Om förväntningarna är elastiska kommer ett högre värde på p_t att öka sannolikheterna för höga värden på p_{t+1} och minska sannolikheterna för låga värden på p_{t+1}. Det sagda betyder att derivatan $\phi'(\,)$ av $\phi(\,)$ med avseende på p_t har positivt värde vid höga p_{t+1} och negativt värde vid låga p_{t+1}. $\bar{U}_{t+1}'(\,)$ är självfallet alltid positiv. Hurudvida integralen får positivt eller negativt tecken beror tydligen på huruvida $\bar{U}_{t+1}'(\,)$ växer eller avtar med värdet på p_{t+1}. Sålunda blir integralen, och därmed förväntningseffekten,

positiv respektive negativ under förutsättning att »expected marginal utility» av att öka den vid slutet av t:te perioden kvarlämnade värdepappersmängden från en given kvantitet med en marginell enhet tilltar respektive avtar med växande värdepapperspris under $(t+1)$:a perioden, dvs. under förutsättning att $(\partial/\partial p_{t+1})U'_{t+1}(\ )$ är positiv respektive negativ.

Vilket som gäller är det emellertid omöjligt att ens under ytterligt förenklade förutsättningar uttala sig om. Det enklast tänkbara fallet inträffar då $(t+1)=n$, dvs. då $U_{t+1}(\ )=U_n(y_n+p_nq_{n-1})$. Därvid blir $U'_{t+1}(\ )=p_n\cdot U'_n(\ )$ och $(\partial/\partial p_{t+1})U'_{t+1}(\ )=U'_n(\ )+p_nq_{n-1}U''_n(\ )$. Eftersom nu $U'_n(\ )>0$, $U''_n(\ )<0$ och $p_nq_{n-1}>0$ kan tecknet på den diskuterade derivatan ej anges. Vi har här två motstridiga tendenser. Dels innebär höjningen av p_n att en marginell enhet, med vilken den från $(n-1)$:a perioden kvarlämnade värdepappersmängden ökas, motsvarar ett högre värdetillskott till den sista periodens konsumtion och således en tendens till ökad gränsnytta. Dels kommer emellertid även den givna kvantiteten q_{n-1} — i förhållande till vilken den marginella ökningen övervägs — att erhålla ett högre värde, varför den sista periodens konsumtion blir mera mättad och en tendens till fallande gränsnytta motverkar den förstnämnda tendensen.

Skulle vi ha valt $t+1<n$ skulle diskussionen ha blivit betydligt mer komplicerad. Det sagda räcker emellertid för att visa att vi inte ens under de enklaste förhållanden kan erhålla ett entydigt tecken på förväntningseffekten då förväntningarna antas vara elastiska. *En benägenhet att justera upp förväntningarna för en viss periods värdepapperspris med stigande värdepapperspris under närmast föregående period (positiv korrelation) leder således inte entydigt till en förväntningseffekt sådan att höjning av en periods aktuella värdepapperspris tenderar att öka värdepappersefterfrågan.* Detta är anledningen till att vi i de mera komplicerade fallen knappast säger mera om förväntningseffekten än att dess tecken är ovisst.

4. Generalisering till det fall då placering kan ske såväl i ett värdepapper som i kontant kassa

Vi skall nu förutsätta att placeraren som förut kan hålla sina tillgångar i det tidigare införda värdepapperet, men dessutom kan kombinera detta med kontant kassahållning. Mängden kassa eller pengar som lämnas kvar från den t:te perioden betecknas m_t. Nettominskningen under perioden t av penninginnehavet betecknas $z_t=(m_{t-1}-m_t)$. Övriga symboler har precis samma innebörd som förut. Det förenklade antagandet om additiv nyttofunktion behålles likaså.

Under varje period gäller det att fördela det initiella värdepappersinne-

havet q_{t-1} i delarna x_t och q_t. Därvid betecknar x_t nettominskningen under perioden i värdepappersinnehavet och kan självfallet vara negativ. Samtidigt gäller det att fördela den initiella kassan m_{t-1} i delarna z_t och m_t, varvid z_t kan vara negativt. Periodens konsumtion uppgår till $c_t = y_t - p_t x_t - z_t$. Genom att reducera den från perioden kvarlämnade förmögenheten $p_t q_t + m_t$ ökar man således den omedelbara konsumtionen. Å andra sidan betyder en ökning av denna kvarlämnade förmögenhet högre framtida potentiell konsumtion. Det gäller således att optimalt avväga storleken av förmögenheten $p_t q_t + m_t$. Dessutom gäller det att bestämma en optimal fördelning av förmögenheten mellan kassa och värdepapper. I analogi till det föregående gäller det för varje stadium av den dynamiska programmeringsprocessen att bestämma funktionen

$$f_t(q_{t-1}, m_{t-1}; p_1, \ldots, p_t)$$

$$= \operatorname*{Max}_{x_t, z_t} \left\{ U_t(y_t + p_t x_t + z_t) \cdot \int \ldots \int_D \phi(p_1, \ldots, p_n) dp_{t-1} \ldots dp_n \right.$$

$$\left. + \int_D f_{t+1}(q_{t-1} - x_t, m_{t-1} - z_t; p_1, \ldots, p_{t+1}) dp_{t+1} \right\} \qquad (4\text{-}1)$$

Liksom förut uttryeks expected utility vid t:te periodens början under förutsättning av optimalt handlande av $f_t(\ ) \int \ldots \int_D \phi(\ ) dp_{t-1} \ldots dp_n$.

Vi skall i den följande härledningen av första och andra ordningens villkor endast sysselsätta oss med ett godtyckligt stadium av optimeringsprocessen. Liksom förut kan man naturligtvis genom upprepad tillämpning av villkoren successivt arbeta sig bakåt från de senare till de tidigare stadierna. Självfallet är $f_n(q_{n-1}, m_{n-1}; p_1, \ldots, p_n) = U_n(y_n + p_n q_{n-1} + m_{n-1}) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n)$. Med kännedom om denna funktion bestäms sedan $f_{n-1}(\ )$, $f_{n-2}(\ )$ etc. enligt den angivna maximeringsproceduren. Lösningen ger vid varje given serie av värdepapperspriser bestämda optimala serier av värdepappersinnehav, kassahållning och konsumerade värden.

a) *Förstaordningsvillkoren*

Under förutsättning att funktionen $f_{t-1}(q_t, m_t; p_1, \ldots, p_{t-1})$ är bestämd kan man således fastställa funktionen $f_t(q_{t-1}, m_{t-1}; p_1, \ldots, p_t)$. Det går till så att man för varje kombination av värden på q_{t-1}, m_{t-1} samt $p_1, \ldots, p_t$ bestämmer de värden på x_t och z_t vilka maximerar uttrycket $U_t(\ ) \cdot \int \ldots \int_D \phi(\ ) dp_{t-1} \ldots dp_n + \int_D f_{t-1}(\ ) dp_{t-1}$. Därefter kan x_t och z_t elimineras i maximanden i (4-1) varvid denna övergår till att bli en funktion av variablerna q_{t-1}, m_{t-1} och $p_1, \ldots, p_t$ enbart. Förstaordningsvillkoren för att x_t och z_t skall ge maximum lyder

$$p_t \cdot U_t'(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n - \int_D \frac{\partial f_{t+1}(\,)}{\partial q_t} dp_{t+1} = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

och

$$U_t'(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n - \int_D \frac{\partial f_{t+1}(\,)}{\partial m_t} dp_{t+1} = 0 \qquad (4\text{-}3)$$

Det förra uttrycket utsäger att marginal utility av att reducera värdepappersmängden med en enhet för att öka den omedelbara konsumtionen skall vara lika med expected marginal utility — enligt periodens förväntningar — av att i stället öka den från perioden kvarlämnade värdepappersmängden med en enhet. Det senare villkoret utsäger att marginal utility av ytterligare en kronas aktuell konsumtion skall vara lika med expected marginal utility — enligt periodens förväntningar — av att i stället öka den från perioden kvarlämnade kassan med en krona. Från de bägge villkoren härleds villkoret

$$\frac{1}{p_t} \cdot \int_D \frac{\partial f_{t+1}(\,)}{\partial q_t} dp_{t+1} = \int_D \frac{\partial f_{t+1}(\,)}{\partial m_t} dp_{t+1} \qquad (4\text{-}4)$$

vilket betyder att expected marginal utility av ytterligare en krona placerad i värdepapper skall vara lika med expected marginal utility av en kronas kassaökning.

b) *Andraordningsvillkoren*

De härledda förstaordningsvillkoren låter oss eliminera x_t och z_t i uttrycket $\{U_t(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D f_{t+1}(\,) dp_{t+1}\}$. Elimineringen ger maximum för uttrycket under förutsättning av uppfyllda andraordningsvillkor. Dessa villkor lyder:

$$\beta_{xx}^t < 0; \beta_{zz}^t < 0 \qquad (4\text{-}5)$$

och

$$A^t = \begin{vmatrix} \beta_{xx}^t & \beta_{xz}^t \\ \beta_{zx}^t & \beta_{zz}^t \end{vmatrix} > 0 \qquad (4\text{-}6)$$

där

$$\beta_{xx}^t = p_t^2 \cdot U_t''(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\,)}{\partial q_t^2} dp_{t+1} \qquad (4\text{-}7)$$

$$\beta_{xz}^t = \beta_{zx}^t = p_t \cdot U_t''(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\,)}{\partial q_t \partial m_t} dp_{t+1} \qquad (4\text{-}8)$$

$$\beta_{zz}^t = U_t''(\,) \cdot \int \dots \int_D \phi(\,) dp_{t+1} \dots dp_n + \int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\,)}{\partial m_t^2} dp_{t+1} \qquad (4\text{-}9)$$

Som synes är β^t_{xx}, β^t_{xz}, β^t_{zx} och β^t_{zz} helt enkelt de fyra partiella andraderivatorna av $\{U_t(\,)\cdot\int\dots\int_D\phi(\,)dp_{t-1}\dots dp_{\tau}+\int_D f_{t-1}(\,)dp_{t-1}\}$ med avseende på variablerna x_t och z_t. Vi kan nu direkt se att $\beta^t_{xx}<0$ under förutsättning att $U'_t(\,)<0$ och $\partial^2 f_{t-1}(\,)/\partial q_t^2<0$ för alla p_{t-1} inom domänen. På samma sätt är $\beta^t_{zz}<0$ under förutsättning att $U'_t(\,)<0$ och $\partial^2 f_{t-1}(\,)/\partial m_t^2<0$ för alla p_{t-1} inom domänen. Det återstående villkoret fordrar en något längre diskussion. Först bygger vi ut determinanten A^t med en ny rad och en ny kolumn.

$$A^t=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_t\cdot U'_t(\,) & \beta^t_{xx} & \beta^t_{xz} \\ U''_t(\,) & \beta^t_{zx} & \beta^t_{zz} \end{vmatrix} \tag{4-10}$$

Därefter subtraheras multipeln p_t av den första kolumnen från den andra och multipeln 1 av den första kolumnen från den tredje. Determinanten övergår då till:

$$A^t=\begin{vmatrix} 1 & -p_t & -1 \\ p_t\cdot U'_t(\,) & \beta^t_{qq} & \beta^t_{qm} \\ U''_t(\,) & \beta^t_{mq} & \beta^t_{mm} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \beta^t_{qq} & \beta^t_{qm} \\ \beta^t_{mq} & \beta^t_{mm} \end{vmatrix}-U''_t(\,)\cdot\begin{vmatrix} 0 & p_t & 1 \\ p_t & \beta^t_{qq} & \beta^t_{qm} \\ 1 & \beta^t_{mq} & \beta^t_{mm} \end{vmatrix} \tag{4-11}$$

där

$$\beta^t_{qq}=\int_D\frac{\partial^2 f_{t+1}(\,)}{\partial q_t^2}dp_{t+1} \tag{4-12}$$

$$\beta^t_{qm}=\beta^t_{mq}=\int_D\frac{\partial^2 f_{t+1}(\,)}{\partial q_t\partial m_t}dp_{t+1} \tag{4-13}$$

$$\beta^t_{mm}=\int_D\frac{\partial^2 f_{t+1}(\,)}{\partial m_t^2}dp_{t+1} \tag{4-14}$$

Sålunda kan A^t uttryckas som en summa av två determinanter. Den förra av dessa skall vi beteckna B^t. Den senare determinanten är en randad determinant — bildad på den förra — och multiplicerad med $-U'_t(\,)$. Såsom förut påpekats är en dylik randad determinant med omvänt förtecken en kvadratisk form bildad i »variablerna» p_t och 1 på den matris vars determinant är B^t. Den kvadratiska formen är negativ definit — oavsett värdet på p_t — under förutsättning att

$$\int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial q_t^2} dp_{t+1} < 0$$

och den icke randade determinanten $B^t > 0$. Ifall dessutom $U_t''(\ ) < 0$ kan man sluta sig till att även $A^t > 0$. Slutsatsen av det hela blir att andraordningsvillkoren är uppfyllda när alla kvadratiska former bildade på matrisen

$$[B^t] = \begin{bmatrix} \beta_{qq}^t & \beta_{qm}^t \\ \beta_{mq}^t & \beta_{mm}^t \end{bmatrix} \tag{4-15}$$

är definit negativa. Låt oss nu skriva ut den kvadratiska formen i de godtyckliga variablerna ξ_q och ξ_m med uttrycken för β_{qq}^t, β_{qm}^t, β_{mq}^t och β_{mm}^t insatta. Därvid erhålles

$$\begin{aligned} &\int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial q_t^2} dp_{t+1} \cdot \xi_q \cdot \xi_q + \int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial q_t \partial m_t} dp_{t+1} \cdot \xi_q \cdot \xi_m \\ &+ \int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial m_t \partial q_t} dp_{t+1} \cdot \xi_m \cdot \xi_q + \int_D \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial m_t^2} dp_{t+1} \cdot \xi_m \cdot \xi_m \\ &= \int_D \left\{ \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial q_t^2} \cdot \xi_q \cdot \xi_q + \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial q_t \partial m_t} \cdot \xi_q \cdot \xi_m \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial m_t \partial q_t} \cdot \xi_m \cdot \xi_q + \frac{\partial^2 f_{t+1}(\ )}{\partial m_t^2} \cdot \xi_m \cdot \xi_m \right\} dp_{t+1} \end{aligned} \tag{4-16}$$

Ett tillräckligt villkor för att integralen skall vara definit negativ är att innehållet i klamrarna är definit negativt vid varje möjligt värde på p_{t+1}. Det som står innanför klamrarna är emellertid andra differentialen med avseende på q_t och m_t till funktionen $f_{t+1}(q_t, m_t; p_1, \ldots, p_{t+1})$ under förutsättning att de godtyckliga variablerna ξ_q och ξ_m tolkas som godtyckliga förändringar dq_t respektive dm_t. Ifall således $d^2 f_{t+1}(\ )$ är definit negativ vid alla p_{t+1} inom domänen följer att även integralen ovan är definit negativ. Det hittills sagda betyder att andraordningsvillkoren för det t:te steget av optimeringsprocessen är uppfyllda ifall $U_t''(\ ) < 0$ och $d^2 f_{t+1}(\ )$ är negativ definit för alla tänkbara p_{t+1}.

Låt oss nu betrakta andradifferentialen $d^2 f_t(\ )$. Ovan definierade vi

$$\begin{aligned} &f_t(q_{t-1}, m_{t-1}; p_1, \ldots, p_t) \\ &= \operatorname*{Max}_{x_t,\, z_t} \left\{ U_t(y_t + p_t x_t + z_t) \cdot \int \ldots \int_D \phi(\ ) dp_{t+1} \ldots dp_n \right. \\ &\left. + \int_D f_{t+1}(q_{t-1} - x_t; m_{t-1} - z_t; p_1, \ldots, p_{t+1}) dp_{t+1} \right\} \end{aligned} \tag{4-17}$$

Kalla nu värdet av uttrycket innanför klammern β'. Observera därvid att β^t är en funktion av q_{t-1}, m_{t-1}, x_t, z_t samt $p_1, \ldots, p_t$. Vi kan skriva

$$df_t(\ ) = \beta^t_q \cdot dq_{t-1} + \beta^t_m \cdot dm_{t-1} + \beta^t_x \cdot dx_t + \beta^t_z \cdot dz_t \tag{4-18}$$

där β^t_q och β^t_m betecknar de partiella derivatorna av β^t med avseende på q_{t-1} respektive m_{t-1}. Emellertid är $f_t(\ )$ definierad på ett sådant sätt att förstaordningsvillkoren $\beta^t_z = 0$ och $\beta^t_z = 0$ alltid är uppfyllda. Härav följer att

$$df_t(\ ) = \beta^t_q \cdot dq_{t-1} + \beta^t_m \cdot dm_{t-1} \tag{4-19}$$

Vi kan nu erhålla andradifferentialen

$$d^2 f_t(\ ) = (\beta^t_{qq} \cdot dq_{t-1} + \beta^t_{qm} \cdot dm_{t-1} + \beta^t_{qx} \cdot dx_t + \beta^t_{qz} \cdot dz_t) \cdot dq_{t-1}$$

$$+ (\beta^t_{mq} \cdot dq_{t-1} + \beta^t_{mm} \cdot dm_{t-1} + \beta^t_{mx} \cdot dx_t + \beta^t_{mz} \cdot dz_t) \cdot dm_{t-1} \tag{4-20}$$

Observera nu att $\beta^t_{qx} = -\beta^t_{qq}$; $\beta^t_{qz} = -\beta^t_{qm}$; $\beta^t_{mx} = -\beta^t_{mq}$; samt $\beta^t_{mz} = -\beta^t_{mm}$. Insättas dessa erhåller vi

$$d^2 f_t(\ ) = \beta^t_{qq} \cdot dq_{t-1} \cdot (dq_{t-1} - dx_t) + \beta^t_{qm} \cdot dq_{t-1} \cdot (dm_{t-1} - dz_t)$$

$$+ \beta^t_{mq} \cdot dm_{t-1} \cdot (dq_{t-1} - dx_t) + \beta^t_{mm} \cdot dm_{t-1} \cdot (dm_{t-1} - dz_t) \tag{4-21}$$

Detta är en kvadratisk form bildad på matrisen

$$[B^t] = \begin{bmatrix} \beta^t_{qq} & \beta^t_{qm} \\ \beta^t_{mq} & \beta^t_{mm} \end{bmatrix} \tag{4-22}$$

i variablerna dq_{t-1}; dm_{t-1}; $dq_t = dq_{t-1} - dx_t$; och $dm_t = dm_{t-1} - dz_t$. Därav är dq_t samt dm_t beroende av dq_{t-1} och dm_{t-1}, ty de mängder av värdepapper och kontanter som lämnas kvar efter den t:te perioden skall ju optimalt anpassas till motsvarande initiellt innehavda mängder. Hur denna anpassning skall tillgå behöver vi emellertid inte nu diskutera. Det väsentliga är att den kvadratiska formen $d^2 f_t(\ )$ blir definit negativ oberoende av dq_{t-1}, dm_{t-1}, dq_t och dm_t ifall

$$\beta^t_{qq} < 0; \beta^t_{mm} < 0 \tag{4-23}$$

samt

$$\begin{vmatrix} \beta^t_{qq} & \beta^t_{qm} \\ \beta^t_{mq} & \beta^t_{mm} \end{vmatrix} > 0 \tag{4-24}$$

gäller. Men dessa villkor var ju helt enkelt andraordningsvillkoren för det t:te stadiet av optimeringsprocessen. Det sagda betyder att $d^2 f_t(\ )$ är nega-

tiv definit under förutsättning att det t:te stadiets andraordningsvillkor är uppfyllda. Motsvarande gäller självfallet även för det $(t+1)$:a stadiet.

Emellertid har vi ovan sett att det t:te stadiets andraordningsvillkor är uppfyllda om $U_t''(\ ) < 0$ och $d^2f_{t+1}(\ )$ är negativ definit för alla p_{t-1}, vilket är fallet om andraordningsvillkoren för det $(t+1)$:a stadiet är uppfyllda vid alla tänkbara p_{t+1}. Ifall vi kan bevisa att $d^2f_n(\ )$ är definit negativ för det sista stadiet i optimeringen följer av $U_t''(\ ) < 0$ för $t = 1, \ldots, (n-1)$ genom induktion att andraordningsvillkoren är uppfyllda i varje tidigare stadium. Nu är ju

$$f_n(q_{n-1}, m_{n-1}; p_1, \ldots, p_n) = U_n(y_n + p_n q_{n-1} + m_{n-1}) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n) \tag{4-25}$$

Vi erhåller därför

$$d^2f_n(\ ) = U_n''(\ ) \cdot \phi(p_1, \ldots, p_n) \cdot (p_n \cdot dq_{n-1} + dm_{n-1})^2 \tag{4-26}$$

Eftersom $\phi(p_1, \ldots, p_n) > 0$ för varje möjlig prisutveckling följer att $d^2f_n(\ ) < 0$ när $U_n''(\ ) < 0$. Härav följer att andraordningsvillkoren är uppfyllda i varje stadium av optimeringsprocessen om $U_t''(\ ) < 0$ gäller för $t = 1, \ldots, n$, dvs. om nyttofunktionen är konvex ovanifrån vid varje sådan möjlig serie av konsumerade värden som kan resultera genom värdepappersprisets utveckling och placerarens egna handlingar.

c) *Komparativ statik*

Liksom i fallet med en tillgång skall vi nu undersöka effekterna av förändringar i aktuell inkomst, värdepapperspris och initiell förmögenhet. Villkoren av första ordningen för optimum under första perioden lyder enligt a) ovan:

$$p_1 \cdot U_1'(\ ) \cdot \int \ldots \int_D \phi(\ )\, dp_2 \ldots dp_n - \int_D \frac{\partial f_2(\ )}{\partial q_1}\, dp_2 = 0 \tag{4-27}$$

och

$$U_1'(\ ) \cdot \int \ldots \int_D \phi(\ )\, dp_2 \ldots dp_n - \int_D \frac{\partial f_2(\ )}{\partial m_1}\, dp_2 = 0 \tag{4-28}$$

Därvid är $\int \ldots \int_D \phi(\ )\, dp_2 \ldots dp_n = 1$ oavsett värdet på p_1. Andra ordningens villkor lyder enligt *b*) ovan:

$$\beta^1_{xx} < 0;\ \beta^1_{zz} < 0 \tag{4-29}$$

och

$$A^1 = \begin{vmatrix} \beta^1_{xx} & \beta^1_{xz} \\ \beta^1_{zx} & \beta^1_{zz} \end{vmatrix} > 0 \tag{4-30}$$

Därvid är

$$\beta^1_{xx} = p_1^2 \cdot U_1''(\ ) + \int_D \frac{\partial^2 f_2(\ )}{\partial q_1^2}\, dp_2 \tag{4-31}$$

$$\beta^1_{xz} = \beta^1_{zx} = p_1 \cdot U_1''(\,) + \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial q_1 \partial m_1} dp_2 \tag{4-32}$$

$$\beta^1_{zz} = U_1''(\,) + \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial m_1^2} dp_2 \tag{4-33}$$

I analogi med det föregående definieras även

$$\beta^1_{qq} = \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial q_1^2} dp_2 \tag{4-34}$$

$$\beta^1_{qm} = \beta^1_{mq} = \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial q_1 \partial m_1} dp_2 \tag{4-35}$$

$$\beta^1_{mm} = \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial m_1^2} dp_2 \tag{4-36}$$

I det följande sysselsätter vi oss endast med den första periodens optimum, varför toppindiceringen på samtliga β^1_{ij} kan utelämnas liksom toppindiceringen på A^1. Om vi låter β beteckna värdet av uttrycket $U_1(y_1 + p_1 x_1 + z_1) + \int_D f_2(q_0 - x_1, m_0 - z_1; p_1, p_2) dp_2$, blir de olika β_{ij} helt enkelt partiella andraderivator av β med avseende på variablerna i och j. Observera att med detta beteckningssätt

$$\begin{cases} \beta_{xq} = -\beta_{qq}; & \beta_{xm} = -\beta_{qm} \\ \beta_{zq} = -\beta_{mq}; & \beta_{zm} = -\beta_{mm} \end{cases} \tag{4-37}$$

Om vi nu differentierar förstaordningsvillkoren med avseende på x_1, z_1, p_1, y_1, q_0 och m_0 erhålles

$$\begin{cases} \beta_{xx} \cdot dx_1 + \beta_{xz} \cdot dz_1 = -U_1'(\,) \cdot dp_1 - p_1 x_1 \cdot U_1''(\,) \cdot dp_1 + \beta_{qp} \cdot dp_1 \\ \qquad\qquad - p_1 \cdot U_1''(\,) \cdot dy_1 + \beta_{qq} \cdot dq_0 + \beta_{qm} \cdot dm_0 \\ \beta_{zx} \cdot dx_1 + \beta_{zz} \cdot dz_1 = \qquad - x_1 \cdot U_1''(\,) \cdot dp_1 + \beta_{mp} \cdot dp_1 \\ \qquad\qquad - U_1''(\,) \cdot dy_1 + \beta_{mq} \cdot dq_0 + \beta_{mm} \cdot dm_0 \end{cases} \tag{4-38}$$

där

$$\beta_{qp} = \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial q_1 \partial p_1} dp_2 \tag{4-39}$$

$$\beta_{mp} = \int_D \frac{\partial^2 f_2(\,)}{\partial m_1 \partial p_1} dp_2 \tag{4-40}$$

d) *Effekten av förändringar i den aktuella inkomstens storlek*

Vi skall nu börja med att undersöka effekten på x_1 och z_1 av en isolerad förändring av y_1. Därför sättes $dp_1 = 0$, $dq_0 = 0$ och $dm_0 = 0$. Enligt Cramers regel blir lösningen till

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) = -p_1 \cdot U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} + U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{xz}}{A} \tag{4-41}$$

och till

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right) = +p_1 \cdot U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zx}}{A} - U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{xx}}{A} \tag{4-42}$$

Härnäst erhåller vi

$$p_1 \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right) = \frac{U_1''(\,) \cdot (-\beta_{xx} + p_1 \cdot \beta_{xz} + p_1 \cdot \beta_{zx} - p_1^2 \cdot \beta_{zz})}{A} = \frac{U_1''(\,) \cdot C}{A} \tag{4-43}$$

Täljaren i bråket kan skrivas i determinantform:

$$U_1''(\,) \cdot C = U_1''(\,) \cdot \begin{vmatrix} 0 & p_1 & 1 \\ p_1 & \beta_{xx} & \beta_{xz} \\ 1 & \beta_{zx} & \beta_{zz} \end{vmatrix} \tag{4-44}$$

Observera att enligt definitionerna ovan

$$\begin{cases} \beta_{qq} = \beta_{xx} - [p_1 \cdot U_1''(\,)] \cdot p_1; \\ \beta_{mq} = \beta_{zx} - [p_1 \cdot U_1''(\,)] \cdot 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_{qm} = \beta_{xz} - [U_1''(\,)] \cdot p_1 \\ \beta_{mm} = \beta_{zz} - [U_1''(\,)] \cdot 1 \end{cases} \tag{4-45}$$

Om vi adderar multiplarna $-[p_1 \cdot U_1''(\,)]$ respektive $-[U_1''(\,)]$ av första kolumnen till andra och tredje kolumnerna övergår täljarens determinant till

$$U_1''(\,) \cdot C = U_1''(\,) \cdot \begin{vmatrix} 0 & p_1 & 1 \\ p_1 & \beta_{qq} & \beta_{qm} \\ 1 & \beta_{mq} & \beta_{mm} \end{vmatrix} \tag{4-46}$$

Enligt diskussionen under *b*) ovan gäller emellertid för nämnarens determinant att

$$A = \begin{vmatrix} \beta_{qq} & \beta_{qm} \\ \beta_{mq} & \beta_{mm} \end{vmatrix} - U_1''(\,) \cdot \begin{vmatrix} 0 & p_1 & 1 \\ p_1 & \beta_{qq} & \beta_{qm} \\ 1 & \beta_{mq} & \beta_{mm} \end{vmatrix} \tag{4-47}$$

eller

$$A = B - U_1''(\,) \cdot C \tag{4-48}$$

Enligt andraordningsvillkoren under b) är $B > 0$, $C > 0$ och $U_1''(\,) < 0$. Vi skriver

$$p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)=\frac{U_1''(\ )\cdot C}{A}=\frac{U_1''(\ )\cdot C}{B-U_1''(\ )\cdot C}=\frac{1}{1-B\,U_1''(\ )\cdot C} \tag{4-49}$$

Eftersom $B/U_1''(\ )\cdot C<0$ gäller att

$$1>p_1\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)>0 \tag{4-50}$$

Nu är emellertid $c_1=y_1+p_1x_1+z_1$ och

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial y_1}\right)=1+p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right) \tag{4-51}$$

varav följer

$$0<\left(\frac{\partial c_1}{\partial y_1}\right)<1 \tag{4-52}$$

eller att den marginella konsumtionsbenägenheten har ett värde mellan 0 och 1. En ökning av den aktuella inkomsten leder sålunda till en något mindre ökning av den omedelbara konsumtionen, varför antingen det optimala innehavet av kontanter, eller det optimala innehavet av värdepapper, eller bådadera ävenledes måste öka. Från teorins allmänna förutsättningar kan man emellertid icke sluta sig till huruvida både det optimala kontantinnehavet och det optimala värdepappersinnehavet eller endast endera av dem kommer att öka. Dock förefaller det a priori plausibelt att varken kontantinnehavet eller värdepappersinnehavet skall reagera som »inferior goods». I följande avsnitt skall vi finna att en ökning av den initiella förmögenheten, dvs. av det initiella kontantinnehavet eller av det initiella värdepappersinnehavets värde, verkar på samma sätt som en ökning av den aktuella inkomsten. Vore någon tillgång »inferior good» skulle det betyda att en ökning av den andra tillgångens initiella mängd skulle öka det optimala innehavet av denna andra tillgång med mera än den initiella ökningen. Det förefaller i regel uteslutet att en ökning av den initiella mängden av en tillgång vid i övrigt lika förhållanden skall framkalla ett ökat behov av denna tillgång med mera än ökningen av dess initiella mängd.

e) *Effekten av förändringar i den initiella förmögenheten*

Vi skall nu undersöka effekten av isolerade förändringar i q_0 och m_0. Därför sättes $dp_1=0$, $dy_1=0$ och till en början även $dm_0=0$ i ekvationssystemet under c) ovan. Enligt Cramers regel kan vi lösa ut

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_0}\right)=\beta_{qq}\cdot\frac{\beta_{zz}}{A}-\beta_{mq}\cdot\frac{\beta_{xz}}{A} \tag{4-53}$$

och $$\left(\frac{\partial z_1}{\partial q_0}\right) = -\beta_{qq}\cdot\frac{\beta_{zx}}{A} + \beta_{mq}\cdot\frac{\beta_{xx}}{A} \tag{4-54}$$

Emellertid vet vi att $\beta_{qq} = \beta_{xx} - p_1^2 \cdot U_1''(\ )$ och $\beta_{mq} = \beta_{zx} - p_1 \cdot U_1''(\ )$. Substitution av dessa uttryck ger:

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_0} = \frac{\beta_{xx}\beta_{zz} - \beta_{zx}\beta_{xz}}{A} + p_1\left[-p_1 \cdot U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{zz}}{A} + U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{xz}}{A}\right] \tag{4-55}$$

och $$\frac{\partial z_1}{\partial q_0} = \frac{\beta_{xx}\beta_{zx} - \beta_{zx}\beta_{xx}}{A} + p_1\left[p_1 \cdot U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{zx}}{A} - U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{xx}}{A}\right] \tag{4-56}$$

Därvid är $A = (\beta_{xx}\beta_{zz} - \beta_{zx}\beta_{xz})$ medan uttrycken innanför klamrarna enligt diskussionen under d) är $(\partial x_1/\partial y_1)$ respektive $(\partial z_1/\partial y_1)$, vilket ger:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_0}\right) = 1 + p_1\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) \tag{4-57}$$

och $$\left(\frac{\partial z_1}{\partial q_0}\right) = p_1\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) \tag{4-58}$$

Eftersom $x_1 = q_0 - q_1$ blir $\partial q_1/\partial q_0 = 1 - \partial x_1/\partial q_0$ och eftersom $z_1 = m_0 - m_1$ blir $\partial m_1/\partial q_0 = -\partial z_1/\partial q_0$. Således kan vi skriva

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_0} = -p_1\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \tag{4-59}$$

och $$\frac{\partial m_1}{\partial q_0} = -p_1\cdot\frac{\partial z_1}{\partial y_1} \tag{4-60}$$

Genom att i stället sätta $dq_0 = 0$ och $dm_0 \neq 0$ erhålles enligt Cramers regel:

$$\frac{\partial x_1}{\partial m_0} = \beta_{qm}\cdot\frac{\beta_{zz}}{A} - \beta_{mm}\cdot\frac{\beta_{xz}}{A} \tag{4-61}$$

och $$\frac{\partial z_1}{\partial m_0} = -\beta_{qm}\cdot\frac{\beta_{zx}}{A} + \beta_{mm}\cdot\frac{\beta_{xx}}{A} \tag{4-62}$$

Vi vet att $\beta_{qm} = \beta_{xz} - p_1 \cdot U_1''(\ )$ och $\beta_{mm} = \beta_{zz} - U_1''(\ )$. Substitution ger:

$$\frac{\partial x_1}{\partial m_0} = \frac{\beta_{xz}\beta_{zz} - \beta_{zz}\beta_{xz}}{A} + \left[-p_1 \cdot U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{zz}}{A} + U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{xz}}{A}\right] \tag{4-63}$$

och $$\frac{\partial z_1}{\partial m_0} = \frac{\beta_{xz}\beta_{zz} - \beta_{zx}\beta_{xz}}{A} + \left[p_1 \cdot U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{zx}}{A} - U_1''(\ )\cdot\frac{\beta_{xx}}{A}\right] \tag{4-64}$$

Klamrarna innehåller $\partial x_1/\partial y_1$ respektive $\partial z_1/\partial y_1$, varför vi i analogi till det tidigare resonemanget erhåller

$$\frac{\partial x_1}{\partial m_0} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \tag{4-65}$$

och

$$\frac{\partial z_1}{\partial m_0} = 1 + \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \tag{4-66}$$

Men eftersom $\partial q_1/\partial m_0 = -\partial x_1/\partial m_0$ och $\partial m_1/\partial m_0 = 1 - \partial z_1/\partial m_0$ blir

$$\frac{\partial q_1}{\partial m_0} = -\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \tag{4-67}$$

och

$$\frac{\partial m_1}{\partial m_0} = -\frac{\partial z_1}{\partial y_1} \tag{4-68}$$

Slutsatserna av detta avsnitt blir således helt enkelt att en lika stor ökning av den aktuella inkomsten, av det initiella kontantinnehavet och av det initiella värdepappersinnehavets *värde* påverkar optimalläget på precis samma sätt. Detta bör självfallet gälla, varför diskussionen här snarare har varit en kontroll på teorins rimlighet än en härledning av icke-triviala konsekvenser från teorin.

f) *Effekten av ett höjt värdepapperspris vid oelastiska förväntningar och under inkomstkompensation*

Vi skall nu börja med att undersöka hur en förändring av värdepapperspriset kan väntas påverka optimum. För att isolera den s. k. substitutionseffekten skall vi emellertid till en början förutsätta att inkomsten förändras samtidigt på ett sådant sätt att expected utility hålles konstant. Dessutom måste vi tänka på att vid elastiska förväntningar själva preferenssystemet kommer att förskjutas när det aktuella värdepapperspriset ändras. För att den rena substitutionseffekten skall kunna isoleras måste förväntningarna antas vara oelastiska, dvs. vi måste sätta $\beta_{qp} = 0$ och $\beta_{mp} = 0$. Den initiella förmögenheten antas självfallet vara given så att $dq_0 = 0$ och $dm_0 = 0$. Inkomstkompensationen dy_1 som svarar mot dp_1 erhålles på följande sätt. Expected utility

$$U_1(y_1 + p_1 x_1 + z_1) + \int_D f_2(q_0 - x_1, m_0 - z_1; p_1, p_2)\, dp_2 \tag{4-69}$$

hålles konstant när

$$U_1'(\,) \cdot (dy_1 + p_1 dx_1 + dz_1 + x_1 dp_1) - \left(\int_D \frac{\partial f_2(\,)}{\partial q_1} dp_2\right) dx_1 - \left(\int_D \frac{\partial f_2(\,)}{\partial m_1} dp_2\right) dz_1 = 0 \tag{4-70}$$

Enligt förstaordningsvillkoren är emellertid

$$p_1 U_1'(\ ) - \int_D \frac{\partial f_2(\ )}{\partial q_1} dp_2 = 0 \tag{4-71}$$

och

$$U_1'(\ ) - \int_D \frac{\partial f_2(\ )}{\partial m_1} dp_2 = 0 \tag{4-72}$$

varför vi kan skriva

$$U_1'(\ ) \cdot (dy_1 + x_1 dp_1) = 0 \tag{4-73}$$

Eftersom $U_1'(\ )$ är en positiv gränsnytta erhålles

$$dy_1 = -x_1 \cdot dp_1 \tag{4-74}$$

vilket är den sökta inkomstkompensationen. Vid prishöjning är kompensationen en inkomstminskning när $x_1 > 0$, dvs. $q_1 < q_0$, och en inkomstökning när $x_1 < 0$, dvs. $q_1 > q_0$. Detta förefaller ju rimligt, ty prishöjningen är en fördel och kompenseras av en inkomstminskning när värdepappersinnehavet under perioden minskas, medan prishöjningen är en nackdel och kompenseras av en inkomstökning när värdepappersinnehavet under perioden ökas.

Substitution av $dq_0 = 0$, $dm_0 = 0, \beta_{qp} = 0$, $\beta_{mp} = 0$, samt $dy_1 = -x_1 \cdot dp_1$ i ekvationssystemet under c) ovan och lösning enligt Cramers regel ger substitutionseffekterna.

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_* = -U_1'(\ ) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} \tag{4-75}$$

och

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)_* = U_1'(\ ) \cdot \frac{\beta_{zx}}{A} \tag{4-76}$$

Från andraordningsvillkoren vet vi att $\beta_{zz} < 0$ och $A > 0$. Således finner vi att $(\partial x_1/\partial p_1)_* > 0$, dvs. att en kompenserad höjning av värdepapperspriset under oelastiska förväntningar ökar x_1, dvs. reducerar den optimala värdepappersmängden q_1 som skall behållas vid första periodens slut. Tecknet på $(\partial z_1/\partial p_1)_*$ kan vi däremot ej uttala oss om — det beror på vilket tecken β_{zx} har. Plausibelt a priori förefaller emellertid antagandet att kontanter och värdepapper är substitut, dvs. att $(\partial z_1/\partial p_1)_* < 0$.

Vi kan nu även undersöka hur konsumtionen c_1 påverkas av en kompenserad prishöjning under oelastiska förväntningar. Eftersom $c_1 = y_1 + p_1 x_1 + z_1$ erhålles

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right)_* = \frac{dy_1}{dp_1} + x_1 + p_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_* + \left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)_* \tag{4-77}$$

Men då ju $dy_1/dp_1 = -x_1$ vid inkomstkompensation blir

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right)_* = p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_* + \left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)_* = -p_1 \cdot U_1'(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} + U_1'(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} \qquad (4\text{-}78)$$

Ovan har vi sett att

$$-\left(\frac{\partial q_1}{\partial y_1}\right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) = -p_1 \cdot U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} + U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} \qquad (4\text{-}79)$$

Eftersom $\beta_{zx} = \beta_{xz}$ erhåller vi

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right)_* = -\frac{U_1'(\,)}{U_1''(\,)} \cdot \left(\frac{\partial q_1}{\partial y_1}\right) \qquad (4\text{-}80)$$

Då $U_1'(\,) > 0$ samt $U_1''(\,) < 0$ blir $-U_1'(\,)\,U_1''(\,) > 0$ varav följer att $(\partial c_1/\partial p_1)_*$ och $(\partial q_1/\partial y_1)$ har samma tecken. Om således värdepapperet ej är »inferior good» kommer ett höjt värdepapperspris under inkomstkompensation att höja den omedelbara konsumtionen, medan den omedelbara konsumtionen sänks om värdepapperet är »inferior good». Att man kan erhålla ett dylikt samband mellan inkomstens verkan på värdepappersinnehavet och värdepapperspris verkan vid inkomstkompensation på konsumtionen förefaller en smula överraskande.

g) *Effekten av en isolerad förändring av värdepapperspriset vid oelastiska förväntningar på värdepappers- och kontantinnehav*

Vi skall nu undersöka hur en prisförändring påverkar optimum när förändringen ej kompenseras av någon motsvarande inkomständring men förväntningarna fortfarande antas vara oelastiska. Därvid sättes $dq_0 = 0$, $dm_0 = 0$, $dy_1 = 0$, $\beta_{zz} = 0$, $\beta_{xz} = 0$ i ekvationssystemet under e) ovan. Enligt Cramers regel erhålles då

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) = -U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} + \left[-p_1 U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A} + U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A}\right] \cdot x_1 \qquad (4\text{-}81)$$

och

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right) = U_1'(\,) \cdot \frac{\beta_{zx}}{A} + \left[p_1 U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zx}}{A} - U_1''(\,) \cdot \frac{\beta_{zz}}{A}\right] \cdot x_1 \qquad (4\text{-}82)$$

Enligt d) ovan innehåller klamrarna uttryken för respektive $(\partial x_1/\partial y_1)$ och $(\partial z_1/\partial y_1)$, medan uttryken framför klamrarna enligt f) ovan uttryker $(\partial x_1/\partial p_1)_*$ respektive $(\partial z_1/\partial p_1)_*$. Det sagda betyder att vi erhåller Slutsky-relationerna

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_* + x_1 \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) \tag{4-83}$$

och

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)_* + x_1 \cdot \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right) \tag{8-84}$$

Vill man i stället uttrycka sambanden för förändringarna i $q_1 = q_0 - x_1$ och $m_1 = m_0 - z_1$ erhålles vid konstanta q_0 och m_0

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_* + (q_0 - q_1) \cdot \left(\frac{\partial q_1}{\partial y_1}\right) \tag{4-85}$$

och

$$\left(\frac{\partial m_1}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial m_1}{\partial p_1}\right)_* + (q_0 - q_1) \cdot \left(\frac{\partial m_1}{\partial y_1}\right) \tag{4-86}$$

Därvid gäller att $(\partial q_1/\partial p_1)_* < 0$. Om vi dessutom kan antaga att ingen av tillgångarna är »inferior good» blir $(\partial q_1/\partial y_1) > 0$ och $(\partial m_1/\partial y_1) > 0$. Vi kan i så fall säga att $(\partial q_1/\partial p_1) < 0$ när $q_1 > q_0$, medan derivatans tecken blir osäkert om $q_1 < q_0$. Detta beror på att substitutionseffekten — som alltid är negativ — vid $q_1 > q_0$ förstärkes av inkomsteffekten, ty en höjning av värdepappersspriset innebär en nackdel när periodens värdepappersinnehav skall ökas och är sålunda jämförlig med en inkomstreduktion, vilket i sin tur reducerar periodens optimala ökning av värdepappersinnehavet då detta ej är »inferior good». Om däremot periodens värdepappersinnehav skall reduceras — dvs. om $q_1 < q_0$ — så är prishöjningen en fördel jämförlig med en inkomstökning — vilket ju i sin tur ökar det optimala värdepappersinnehavet vid periodens slut om värdepapperet ej är »inferior good». Men i så fall motverkas substitutionseffekten, vilken ju minskar det optimala innehavet av de till följd av prishöjningen relativt dyrare värdepapperen.

För det optimala kontantinnehavet vid periodens slut gäller när värdepapper och kontanter är substitut, dvs. när $(\partial m_1/\partial p_1)_* > 0$, att höjningen av värdepappersspriset ökar kontantinnehavet om $q_1 < q_0$, medan effekten i annat fall är osäker. Som synes gör inkomsteffekterna resultaten av prisförändringar mycket osäkra. I föregående kapitel betraktade vi optimalt handlande under en enstaka period. Det föreföll då naturligt att antaga en successiv anpassning av förmögenhetens faktiska storlek och sammansättning till optimum vid varje liten förändring av värdepappersspriset. Eftersom man då kunde antaga att det initiella innehavet av värdepapperet och det optimala innehavet därav alltid skulle överensstämma vid varje ny prisändring kunde alla inkomsteffekter försummas. Den största avvikelsen av detta kapitels dynamiska planering över en serie perioder — under vilka

förmögenheten successivt förändras till storlek och sammansättning — i förhållande till föregående kapitels diskussion består i att vi inte längre kan försumma inkomsteffekterna.

h) *Varför inkomsteffekterna ej kan försummas*

Mera exakt uttryckt beror det på vilka förändringar vi vill undersöka om inkomsteffekterna fortfarande kan försummas eller ej. Vill vi undersöka effekten av en prisförändring vid en periods början *innan* placeraren ännu har anpassat sitt optimum till den nya periodens pris före förändringen — då får inkomsteffekterna ej försummas. Detta svarar mot en *komparativt statisk* problemställning där man diskuterar *alternativa men samtidiga situationer* i vilka värdepapperspriserna är olika. Vill man däremot undersöka en *dynamisk* process av *konsekutiva situationer i tiden* med olika värdepapperspriser, då är det naturligt att tänka sig en successiv anpassning. Om denna anpassning sker kontinuerligt till varje liten förändring — då kan man försumma inkomsteffekterna.

Emellertid är teorin i detta kapitel konstruerad för en diskret beslutsprocess, där tiden har delats upp i ett antal perioder under vilka varken några nya beslut fattas eller några nya förändringar av värdepapperspriserna inträffar. Ett enda beslut fattas vid början av varje period och värdepapperspriserna ändras endast vid periodskiftena. (Verkställigheten av alla betalningar som föranleds av beslutet fattat vid början av varje period sker vid periodens slut innan värdepapperspriset ändras, men detta har ingenting att göra med den diskuterade frågan rörande beslutsprocessen.) Följaktligen strider det mot teorins förutsättningar att diskutera konsekutiva förändringar under en enstaka period. Denna dynamiska fråga kommer in när vi betraktar en serie av på varandra följande perioder. Däremot kan de komparativt statiska effekter som diskuteras i detta kapitel endast avse alternativa och samtidiga situationer med infinitesimalt olika värdepapperspriser.

Därför kan inkomsteffekterna inte längre försummas, ty till följd av att belutsprocessen är diskret kommer förändringarna av förmögenhetens storlek och sammansättning mellan olika perioder att bli finita — så att något antagande om likhet mellan det faktiska värdepappersinnehavet vid periodens början och det optimala innehavet vid periodens slut ej kan uppställas. Härav följer då även att effekterna på värdepappersinnehavet och kontantinnehavet av ändrade värdepapperspriser blir ytterst osäkra.

Antar vi dessutom att förväntningarna är elastiska måste vi ta hänsyn till hur »expected marginal utilities» av att öka de från första perioden kvarlämnade mängderna av värdepapper respektive kontanter påverkas av

periodens värdepapperspris. Denna påverkan beror på hur förväntningarna ändras med det aktuella priset och på strategierna för samtliga följande perioder. Elastiska förväntningar gör därför resultaten ännu mer ovissa.

i) *Effekten på konsumtionen av ett höjt värdepapperspris under oelastiska förväntningar*

Innan vi avslutar denna diskussion skall vi även se hur den omedelbara konsumtionen påverkas av förändringar i värdepapperspriset under oelastiska förväntningar. Eftersom $c_1 = y_1 + p_1 x_1 + z_1$ erhålles

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right) = p_1 \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right) + \left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right) + x_1$$

$$= p_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_* + \left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)_* + x_1 \cdot \left[p_1 \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)\right] + x_1 \qquad (4\text{-}87)$$

Ovan under f) har vi emellertid sett att

$$p_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_* + \left(\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)_* = \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right)_* \qquad (4\text{-}88)$$

Dessutom har vi under d) funnit att

$$p_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right) = \left(\frac{\partial c_1}{\partial y_1}\right) - 1 \qquad (4\text{-}89)$$

Härav följer att

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1}\right)_* + x_1 \cdot \left(\frac{\partial c_1}{\partial y_1}\right) \qquad (4\text{-}90)$$

Under f) ovan har vi emellertid konstaterat att $(\partial c_1/\partial p_1)_*$ är negativ eller positiv beroende på om värdepappersinnehavet är »inferior good» eller ej. Bortser vi från möjligheten att någon tillgång skulle vara inferior good följer att $(\partial c_1/\partial p_1)_* > 0$. Under d) har vidare konstaterats att $(\partial c_1/\partial y_1)$ alltid har ett värde mellan noll och ett. Ifall således $x_1 > 0$ — dvs. $q_0 > q_1$ — blir $(\partial c_1/\partial p_1) > 0$, medan effekten i annat fall är oviss. Om värdepappersinnehavet ej är inferior good och om detta innehav skall minskas under perioden så kommer ett höjt värdepapperspris att höja den omedelbara konsumtionen vid oelastiska förväntningar. I övrigt kan ingenting bestämt sägas.

j) *Sammanfattning om effekterna av ett förändrat värdepapperspris för en enskild individ och för ett aggregat av individer*

Vi kan nu sammanfatta resultaten beträffande tecknen på $(\partial q_1/\partial p_1)$; $(\partial m_1/\partial p_1)$ och $(\partial c_1/\partial p_1)$ i följande tablå konstruerad under förutsättningarna

att förväntningarna är oelastiska, *att* varken värdepapper eller kontanter är inferior goods och *att* värdepapper och kontanter är substitut.

	$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$	$\frac{\partial m_1}{\partial p_1}$	$\frac{\partial c_1}{\partial p_1}$
$q_1 < q_0$	?	+	+
$q_1 > q_0$	—	?	?

För den som skall minska värdepappersinnehavet under den första perioden kommer en stegring av värdepapperspriset att öka den mängd kontanter som skall behållas vid periodens slut och att öka den omedelbara konsumtionen, medan effekten på den mängd värdepapper som skall behållas vid periodens slut är oviss. För den som skall öka värdepappersinnehavet under den första perioden kommer i stället mängden värdepapper som behålles vid periodens slut att reduceras när värdepapperspriset stiger, medan effekten på konsumtion och kontantinnehav är oviss.

Såsom förut påpekats är det inkomsteffekterna som åstadkommer denna ovisshet. Vi har argumenterat att man inte kan försumma dessa vid diskussionen av en individs handlande. Annorlunda kan det ställa sig om vi intresserar oss för ett aggregat av individer av vilka somliga är i färd med att bygga upp en förmögenhet i avsikt att förbruka den senare, somliga med att förbruka förmögenheter som de har byggt upp tidigare; och där de övriga i stort sett nöjer sig med att konsumera varje periods inkomst och gör de små köpkraftsöverflyttningar mellan olika perioder som behövs genom att hålla kontanter. Den sistnämnda kategorin är tämligen ointressant, men om man kan antaga att de bägge tidigare kategorierna i stort sett uppväger varandra torde inkomsteffekterna kunna lämnas utan avseende när man undersöker effekten på de aggregerade storheterna värdepappersmängd, kontantmängd och konsumtion. Kan man göra detta antagande följer att värdepappersinnehavet reduceras, kontantinnehavet ökas och konsumtionen ökas av ett höjt värdepapperspris.

Dessa slutsatser är naturligtvis beroende av de tre förutsättningar under vilka tabellen ovan konstruerades. Bland dem förefaller förutsättningen om oelastiska förväntningar mest tvivelaktig. Tydligen får slutsatserna inskränkas till att gälla under lugna ekonomiska förhållanden då förväntningarna för framtida värdepapperspriser är stabila i relation till förändringar i det aktuella värdepapperspriset.

5. Statik och dynamik vid stock- och flow-analys

Den föregående diskussionen om en placerares optimum vid dynamisk planering av konsumtion, värdepappers- och kontantinnehav under osäkerhet beträffande värdepappersprisets utveckling har visat att efterfrågan efter värdepapper och kontanter — avsedda att lämnas kvar vid slutet av en viss period — beror på den från närmast föregående period kvarlämnade förmögenheten, på det aktuella värdepapperspriset och på förväntningssituationen som bestämts av värdepappersprisets tidigare utveckling fram till och med den aktuella perioden. Vi kan således säga att vi har härlett efterfrågefunktioner för värdepapper och kontanter med det aktuella värdepapperspriset som argument — när den tidigare prisutvecklingen och den initiella förmögenheten antas vara givna. Den senare komparativt statiska analysen har även avslöjat vissa av tecknen på funktionernas första derivator. Det är emellertid viktigt att ha klar för sig karaktären av dessa efterfrågefunktioner och arten av de frågeställningar för vilka de har någon relevans.

Tidigare har påpekats att de till en viss period hörande funktionerna uttrycker efterfrågan efter värdepapper och pengar i alternativa och samtidiga situationer — karaktäriserade av olika värdepapperspriser. De kan sålunda inte användas för att diskutera effekterna av konsekutiva förändringar i värdepapperspriset. Själva konstruktionen av teorin är sådan att endast en förändring av värdepapperspriset och ett häremot svarande konsumtions- och placeringsbeslut infaller under varje period. Härav följer att vi endast kan diskutera en sekvens av händelser om vi betraktar beslutsprocessen under en följd av perioder.

Det kan nu vara fördelaktigt att mera lösligt diskutera efterfrågefunktionernas karaktär utan någon direkt referens till den speciella beslutsmodellen. Härigenom kan vi finna vissa grundläggande olikheter mellan efterfrågefunktionerna för stock och flow som inte bottnar i speciella antaganden rörande den dynamiska beslutsprocessens karaktär.

Den vanliga enperiodiga konsumtionsteorin låter bestämma den optimala efterfrågan efter en viss vara vid givet preferenssystem, given inkomst och givna varupriser. Genom att låta preferenssystemet, inkomsten samt de övriga konsumtionsvarornas priser vara oförändrade och variera varans eget pris kan man bestämma en efterfrågefunktion för varan med dess pris som argument. Då diskussionen hänför sig till en enda period borde efterfrågefunktionen strängt taget avse alternativa och samtidiga situationer med olika priser på varan i fråga. Tänker man sig emellertid att preferenserna, inkomsten och de övriga priserna är oförändrade under en följd av

perioder kan man med hjälp av den härledda efterfrågefunktionen även diskutera konsekutiva händelser som utgör en följd av förändringar i varans eget pris. När man sedan vill använda efterfrågefunktionen i en dynamisk modell dateras de olika variablerna och kommer då antingen att höra till samma period — eller till olika perioder om det skulle finnas några särskilda skäl till s. k. »lags». Den statiska efterfrågefunktionen, som på detta sätt dynamiserats, förändras i övrigt ej under förloppet.

Genom att lägga till andra — på samma sätt dynamiserade — beteendefunktioner och jämviktsvillkor — eller speciella dynamiska samband vilka exempelvis kan uttrycka justeringen av marknadspriset som beroende på graden av efterfråge- eller utbudsöverskott — erhålles en dynamisk marknadsmodell. I en sådan bestäms de olika variablernas följande utveckling helt av deras tidigare utveckling fram till och med utgångsläget. Den statiska frågeställningen motsvaras av specialfall av den dynamiska då man endast sysselsätter sig med sådana förlopp där de olika variablerna håller stationära värden. Ett jämviktsläge i den statiska teorin svarar mot ett dylikt stationärt förlopp i den dynamiska. Ifall endast stationära förlopp intresserar är det likgiltigt om man använder dynamisk eller statisk teori. Då variablerna har stationära värden blir dateringen överflödig och de dynamiska funktioner som anger marknadsprisets justering med hänsyn till utbuds- eller efterfrågeöverskottet faller sönder till enkla jämviktsvillkor.

Om man nu kan anta att varje dynamiskt förlopp i en modell har en naturlig tendens att i frånvaro av yttre störningar tendera mot ett stationärt förlopp är det uppenbart att den statiska analysen uttrycker en verklig tendens på längre sikt. Den dynamiska analysen är därvid ett medel att försäkra sig om att avvikelser från det stationära förloppet endast är tillfälliga för ett åt sig själv lämnat system och att den statiska analysen följaktligen har relevans för diskussion av förhållandena på lång sikt.

Det sagda gäller emellertid endast under en förutsättning som har rönt förvånande litet intresse — nämligen den att beteendefunktionernas former själva ej beror av det dynamiska förloppets art. Vi har ovan argumenterat att efterfrågefunktionen för en konsumtionsvara med dess eget pris som argument kan väntas vara oförändrad från period till period.

Annorlunda ställer det sig emellertid när vi har att göra med efterfrågefunktionen för exempelvis värdepapper med dess pris som argument. Vi har redan framhållit att värdepappersefterfrågan även beror på den initiella förmögenheten. Så snart den optimala förmögenheten anpassas till värdepapperspriset under en viss period kommer ju den initiella förmögenheten för nästa period att ändras och därmed även efterfrågefunktionen för den sistnämnda perioden. När man har att göra med flow-storheter är dessa för-

bundna endast med de perioder till vilka de hör. Stock-storheterna utgör däremot länkar mellan perioderna och låter de tidigare periodernas handlande påverka vad som skall vara optimalt handlande för de senare perioderna.

Härtill kommer den omständigheten att finansiella tillgångar ej är nyttigheter i sig utan används till att föra över köpkraft till framtiden. Fördelen av att inneha finansiella tillgångar härleder sig från den köpkraft de i framtiden väntas ha gentemot konsumtionsvaror. Dessa förväntningar beror emellertid på det aktuella värdepapperspriset och på den tidigare prisutvecklingen.

Vi kan sålunda säga att — även om efterfrågefunktionen för värdepapper med dess pris som argument skulle vara oförändrad från period till period under förutsättning att den initiella förmögenheten och förväntningarna vore oförändrade — så kan man inte vänta sig detsamma under ett dynamiskt förlopp där värdepapperspriset varierar och förmögenheten anpassas till prisets variationer.

Speciellt gäller att förändringar under en period utmed efterfrågefunktionen ej är reversibla. Låt oss säga att värdepapperspriset stiger under en period i förhållande till närmast föregående och under närmast följande period åter faller till utgångsläget. Vi jämför då beslutet fattat under den sistnämnda perioden med det beslut som skulle ha fattats om prisstegringen ej skulle ha inträffat. Ifall priset stiger och förmögenheten anpassas till det höjda priset kommer — när priset återgår till sitt ursprungliga värde — förmögenheten ej att ha samma värde som före höjningen. Vidare är det uppenbart att en prisstegring med återgång måste åstadkomma en annan förväntningssituation än om priset hade kvarstått vid sitt förra värde. Det finns då ingen anledning att vänta sig samma beslut efter en prisförändring med återgång som vid oförändrat pris.

Men av det sagda följer att man överhuvudtaget ej kan definiera efterfrågefunktioner för stocks som kan väntas behålla sin form oberoende av det dynamiska förloppet. Följaktligen måste man antingen hålla sig till en genuint statisk frågeställning och diskutera alternativa händelser under en och samma tid eller också konstruera en dynamisk teori där efterfrågefunktionernas form varierar och beror på själva det dynamiska förloppet. Vid verkliga stationära förlopp i den dynamiska modellen där både värdepapperspris och förmögenhet till storlek och sammansättning håller sig konstanta kommer osäkerheten att försvinna och den konstanta förmögenheten att spela en så passiv roll att alla typiska drag för stockteorin försvinner. I detta fall kan man självfallet definiera efterfrågefunktioner som behåller sin givna form under förloppet, varvid en statisk analys återigen blir likvärdig med den dynamiska.

Emellertid har man inte någon direkt anledning att här vänta sig någon automatisk tendens för det dynamiska förloppet i ett åt sig självt lämnat system att bli stationärt, varför de statiska efterfrågefunktionerna för stocks knappast kan användas till annat än diskussion av alternativa och samtidiga engångsförändringar av värdepapperspriset.

Kapitel VIII

FINANSPOLITIKENS LIKVIDITETSVERKNINGAR

Vi skall nu se hur slutsatserna från den tidigare mikroekonomiska diskussionen kan användas i en makroekonomisk modell för analys av finanspolitikens likviditetsverkningar. I keynesianska modeller för ekonomier med offentlig sektor men utan internationell handel brukar man använda sig av följande ekvationer:

$$Y = C + I + G \tag{1}$$

$$C = C(Y - T) \tag{2}$$

$$I = I(i) \tag{3}$$

$$M = M_a + M_t \tag{4}$$

$$M_t = k \cdot Y \tag{5}$$

Dessa är i tur och ordning: (1) Definitionen för hur nationalinkomsten Y genereras av privata konsumtionsutgifter C, privata investeringsutgifter I, och sammanlagda offentliga utgifter G. (2) Konsumtionsfunktionen, vilken anger de privata konsumtionsutgifternas beroende av den disponibla nationalinkomsten efter avdrag av skatterna T. (3) »Marginal-efficiency-of-capital»-funktionen angivande storleken av de sammanlagda utgifterna för alla de privata investeringar, vilka avkastar en högre intern ränta än effektiva räntan i på långa statsobligationer. (4) Ekvationen för penningmängdens uppdelning i en inaktiv del M_a, utgörande ett förmögenhetsobjekt i likhet med statsobligationer, och en aktiv del M_t, vilken cirkulerar för att möjliggöra de transaktioner genom vilka nationalinkomsten genereras. (5) En ekvation som uttrycker det förhållandet att behovet av aktiva kassor är proportionellt mot den nationalinkomst som skall omsättas när den aktiva delen av penningmängden cirkulerar med konstant hastighet.

Detta system brukar utökas med den s. k. likviditetspreferensfunktionen, $M_a = L(i)$, vilken anger hur det sammanlagda värdet av de som förmögenhetsobjekt hållna inaktiva kassorna varierar med effektiva räntan på långa statsobligationer. Funktionen härleder sig från de enskilda förmögenhetsinnehavarnas beslut rörande förmögenheternas placering i kontant kassa och

i statsobligationer. Det antas att ju lägre effektiva räntan på statsobligationer är — dvs. ju högre de aktuella obligationspriserna är — desto mera går förmögenhetsinnehavarnas framtidsförväntningar ut på räntestegring — något som är liktydigt med kursförluster på de portioner av förmögenheterna som hålles i obligationer. På samma sätt antas förväntningar om kursvinster på obligationerna dominera ju högre värde effektiva räntan har. Man räknar följaktligen med en stor benägenhet att placera förmögenheterna i inaktiva kassor — hög likviditetspreferens — när effektiva räntan på obligationer är låg, och med låg likviditetspreferens när effektiva räntan är hög.

Emellertid är det egendomligt att endast den ena typen av förmögenhetsobjekt — dvs. kontanter — men däremot ej den andra typen — obligationer — uttryckligen har tagits med i modellen. Av detta följer att det är oklart vilken typ av förändringar i de inaktiva kassornas storlek det är fråga om när en rörelse utefter likviditetspreferensfunktionen inträffar. Man kan exempelvis tänka sig att centralbanken ökar den mängd kontanter som hålls i inaktiva kassor genom att bjuda upp obligationspriserna — sänka effektiva räntan — och därigenom inducera förmögenhetsinnehavarna att till centralbanken sälja en del av sitt obligationsinnehav i utbyte mot kontanter. Ett annat slags förändring av de inaktiva kassornas storlek inträffar när i stället staten säljer obligationer till riksbanken i utbyte mot kontanter, vilka används till att betala allmänheten för varor och tjänster. Ifall hela ökningen i penningmängd ej absorberas i cirkulationen, kommer de inaktiva finansiella förmögenheterna att öka. Emellertid kommer förmodligen allmänheten inte att vid oförändrade obligationspriser vilja hålla hela förmögenhetsökningen i form av kontanter, utan önskar placera en del av denna i obligationer. Härigenom bjuds obligationskurserna upp och effektiva räntan faller.

I bägge de diskuterade fallen ökas de inaktiva kassornas storlek, vilket allmänheten finner önskvärt när effektiva obligationsräntan faller. I det förra fallet inträffar emellertid en minskning av den utelöpande obligationsmängden när centralbanken bjuder upp kurserna och köper obligationer i utbyte mot kontanter. I det senare fallet förblir obligationsmängden oförändrad och allmänheten bjuder själv upp kurserna på utelöpande obligationer. Sambandet mellan effektiva obligationsräntan och storleken av inaktiva kassor kan rimligtvis inte vara detsamma i bägge fallen. Det förefaller troligast att likviditetspreferensfunktionen skall avse förändringar av den typ där den utelöpande obligationsmängden hålles konstant. Men det betyder att en makroekonomisk modell av den beskrivna typen icke kan användas för att analysera verkningarna av centralbankens operationer i

öppna marknaden; eller av sådana statsutgifter som finansieras med lån hos allmänheten mot obligationer. Avsikten med detta kapitel är att undersöka hur likviditetspreferensfunktionen med hänsyn till vår tidigare mikroekonomiska diskussion måste förändras för att det skall vara möjligt att undersöka effekten av sådana förändringar där även den utelöpande obligationsmängden kan variera.[1]

Av detta skäl skall vi ersätta likviditetspreferensfunktionen med följande ekvationer:

$$F = M_a + B \tag{6}$$

$$B = B(i, F) \tag{7}$$

$$B = p \cdot Q \tag{8}$$

$$p = 1/i \tag{9}$$

Dessa anger: (6) Att summan av alla förmögenheterna består av det sammanlagda värdet M_a för de inaktiva kassorna och av det sammanlagda värdet B för i allmänhetens ägo befintliga statsobligationer. (7) Att det sammanlagda värde B, som allmänheten önskar placera i statsobligationer, beror av effektiva obligationsräntan i och av de sammanlagda förmögenheternas värde F. (8) Att de utelöpande obligationernas värde B utgör produkten av obligationspriset p och den utelöpande obligationsmängden Q. (9) Att priset för en evig obligation — för enkelhets skull antas obligationerna vara eviga — med en kronas räntekupong är inverterade värdet av effektiva räntan. Den funktion som direkt uttrycker förmögenhetsinnehavarnas optimala beslut beträffande placeringen i obligationer och i inaktiv kassa är nummer (7). Ekvationerna (6) och (7) tillsamman ger $M_a = F - B(i, F)$.

Det enda som skiljer detta uttryck från likviditetspreferensfunktionen $M_a = L(i)$, är att det totala förmögenhetsvärdet F även påverkar likviditetspreferensen vid sidan av effektiva obligationsräntan i. Det är sålunda via F som den utelöpande obligationsmängden Q explicit kommer in i modellen. Det sagda kan ses på följande sätt. Med hjälp av ekvationerna (6)–(9) kan vi eliminera variablerna F, B och p, vilket ger: $Q/i = B(i, M_a + Q/i)$. Sålunda erhålles ett samband mellan de återstående variablerna M_a, i och Q. Vill vi lösa ut M_a explicit för att erhålla likviditetspreferensfunktionen måste denna skrivas $M_a = L(i, Q)$.

Det kan vara lämpligt att på detta stadium erinra sig resultaten av den tidigare mikroekonomiska diskussionen. När det gällde ett enskilt subjekt sade vi det vara omöjligt att definiera statiska efterfrågefunktioner för

[1] Det förhållandet att man ej kan räkna med en entydig likviditetspreferensfunktion har påpekats av T. Palander vid IEA:s konferens i Royamont den 3.4. 1962.

obligationer och kontanter vilka var oberoende av själva det dynamiska förloppet såsom i den vanliga konsumtionsteorin. Eftersom varje prisförändring på obligationer i regel skulle leda till en anpassning av förmögenhetens storlek och sammansättning skulle ett entydigt samband mellan å ena sidan kontant kassa eller obligationer och å den andra obligationspriset — eller effektiva räntan — ej kunna definieras. För att undvika denna svårighet måste man låta efterfrågan på obligationer och kassa bero på såväl obligationspriset — eller effektiva räntan — som den initiella förmögenhetens värde. Detsamma måste göras på makroplanet med de aggregerade funktionerna för obligations- och kassaefterfrågan. Således finns det skäl att antaga de enskilda subjektens beteende vara sådant att efterfrågefunktionerna måste formuleras $B = B(i, F)$ respektive $M_a = F - B(i, F)$. Vidare har vi ju strax innan sett att denna formulering krävs för att fullständigt kunna diskutera effekterna av olika marknadsförändringar som medför variationer av de inaktiva kassornas storlek.

När vi på detta vis definierar statiska efterfrågefunktioner som är oberoende av det dynamiska förloppet — genom ansatsen att i dessa sätta in det initiella förmögenhetsvärdet — kan vi klara av den svårighet vid »stock»-teorin som består i att de tidigare placeringsbesluten måste påverka de följande. Den andra svårigheten — som består i att olikartade förlopp för obligationsprisets tidigare utveckling skapar olika förväntningssituationer — kan emellertid inte klaras av på detta sätt. Vill vi formulera efterfrågefunktioner som endast innehåller det aktuella obligationspriset måste vi antingen hålla oss till en enda period och en strikt statisk frågeställning — så att den tidigare prisutvecklingen kan tas för given — eller också måste vi förutsätta korrelationerna mellan obligationsprisförväntningarna för olika perioder ha så enkel karaktär att de kan beskrivas inom ramen för Markovprocesser.

Låt oss nu betrakta ekvationssystemet (1)–(9). I de nio ekvationerna ingår de tretton variablerna Y, C, I, G, T, i, M, M_a, M_t, F, B, p och Q. Bland dessa är fyra — dvs. G, T, M och Q handlingsparametrar för staten. Återstår alltså sedan staten har fixerat sin politik nio variabler vilkas jämviktsvärden — i den mån unika sådana existerar — determineras av de nio ekvationerna. Den modell vi har erhållit liknar i mycket den som används av Musgrave, men skiljer sig på en viktig punkt — nämligen däri att Musgrave har angivit den speciella formen $B = \alpha \cdot F$ för den funktion vilken vi har skrivit $B = B(i, F)$.[1]

Det sagda innebär alltså att den del av de sammanlagda förmögen-

[1] Se R. Musgrave, »The Theory of Public Finance», New York 1959, s. 544 ff.

heterna som allmänheten önskar placera i obligationer utgör en konstant proportion vilken är oberoende av effektiva obligationsräntan. Följaktligen har Musgrave frångått den grundläggande förutsättningen i likviditetspreferensteorin som låter valet mellan inaktiv kassa och obligationer direkt bero på effektiva obligationsräntans aktuella höjd. Ett indirekt samband mellan inaktiv kassa och effektiv obligationsränta — till formen likt likviditetspreferensfunktionen — uppstår visserligen. Men detta samband beror på att när obligationspriserna stiger — dvs. effektiva räntan faller — kommer det faktiska värdet av i allmänhetens ägo befintliga obligationer att falla. När således endast de portioner av förmögenheterna minskar i värde vilka placerats i obligationer kommer allmänheten att vilja reducera sina inaktiva kassor i avsikt att bibehålla proportionen $\alpha : (1 - \alpha)$ mellan obligationsportföljernas och de inaktiva kassornas värden.

Låt oss nu se vad som inträffar med modellen när de statliga handlingsparametrarnas värden förändras. Differentiering av ekvationssystemet ger:

$$\Delta Y = \Delta C + \Delta I + \Delta G \tag{1 a}$$

$$\Delta C = C_Y \cdot \Delta Y - C_Y \cdot \Delta T \tag{2 a}$$

$$\Delta I = I_i \cdot \Delta i \tag{3 a}$$

$$\Delta M = \Delta M_a + \Delta M_t \tag{4 a}$$

$$\Delta M_t = k \cdot \Delta Y \tag{5 a}$$

$$\Delta F = \Delta M_a + \Delta B \tag{6 a}$$

$$\Delta B = B_i \cdot \Delta i + B_F \cdot \Delta F \tag{7 a}$$

$$\Delta B = p \cdot \Delta Q + \Delta p \cdot Q \tag{8 a}$$

$$\Delta p = -(1/i^2) \cdot \Delta i \tag{9 a}$$

Vi kan först använda ekvationerna (4 a)–(7 a) till att eliminera ΔM_a, ΔM_t och ΔF. Resultatet blir följande samband mellan ΔY, Δi, ΔM och ΔB.

$$(1 - B_F) \cdot \Delta B = B_i \cdot \Delta i + B_F \cdot \Delta M - B_F \cdot k \cdot \Delta Y \tag{10}$$

Därvid utgör ΔB förändringen i marknadsvärdet av utelöpande obligationer. Såsom vi ser av ekvation (8 a) utgör ΔB värdet $p \cdot \Delta Q$ av förändringen i antalet utelöpande obligationer ökat med värdeförändringen $\Delta p \cdot Q$ på i allmänhetens ägo befintliga obligationer. När vi är intresserade av finansieringsformerna för statens utgifter är endast den del av förändringen i marknadsvärdet av utelöpande obligationer relevant vilken härleder sig från ändringen i obligationskvantitet men ej den del vilken beror på värdeändringen för de utelöpande obligationerna. Om vi låter D beteckna det

kumulerade värdet av alla statens obligationstransaktioner med allmänheten — så att statens försäljningar av obligationer anges med positivt och dess köp med negativt förtecken — kommer vi att erhålla $\Delta D = p \cdot \Delta Q$.

Av ekvation (9 a) ser vi hur Δp beror på Δi. Eftersom vi vet att $p = 1/i$ kan vi skriva $\Delta p = -p^2 \cdot \Delta i$ eller, då ju $Q = B/p$, $\Delta p \cdot Q = -B \cdot p \cdot \Delta i$. Detta sistnämnda uttryck tillsamman med $p \cdot \Delta Q = \Delta D$ substituteras i ekvation (8 a), vilket ger

$$\Delta B = \Delta D - B \cdot p \cdot \Delta i \tag{11}$$

Härnäst låter (10) och (11) sammantagna eliminera ΔB så att resultatet blir följande samband i variablerna Δi, ΔM, ΔD och ΔY:

$$\Delta i = \frac{B_F}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p} k \cdot \Delta Y - \frac{B_F}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p} \cdot \Delta M + \frac{(1 - B_F)}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p} \cdot \Delta D \tag{12}$$

Vi eliminerar nu ΔI och ΔC med hjälp av ekvationerna (1 a)–(3 a), vilket ger:

$$\Delta Y = C_Y \cdot \Delta Y - C_Y \cdot \Delta T + I_i \cdot \Delta i + \Delta G \tag{13}$$

Slutligen kan (12) och (13) användas till att eliminera förändringen av effektiva obligationsräntan Δi, varefter det återstår uttrycket

$$\left(1 - C_Y - \frac{I_i \cdot B_F \cdot k}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}\right) \cdot \Delta Y = \Delta G - C_Y \cdot \Delta T - \frac{I_i \cdot B_F}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p} \cdot \Delta M + \frac{I_i \cdot (1 - B_F)}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p} \Delta D \tag{14}$$

Resultatet blir att vi kan se hur nationalinkomsten Y påverkas av förändringar i de statliga parametrarna G, T, M och D.

Det är nu uppenbart att vi måste uppställa ett slags »budgetrestriktion» för sambandet mellan dessa statliga parametrar. Denna restriktion har formen

$$G = T + \Delta M + \Delta D \tag{15}$$

och uttrycker det förhållandet att statsutgifterna G kan finansieras antingen genom skatter T, eller genom lån i riksbanken och därav följande *ökning* ΔM i penningmängden, eller också genom lån hos allmänheten och därav följande *ökning* ΔQ i den utelöpande obligationsmängden. Marknads-

värdet av den sistnämnda förändringen uppgår enligt vad vi har sett till $\Delta D = p \cdot \Delta Q$. »Budgetrestriktionen» täcker också den möjlighet då statens utgifter och skatter balanserar varandra varvid $\Delta M + \Delta D = 0$, dvs. centralbanken företar operationer i öppna marknaden genom att till allmänheten sälja obligationer eller genom att köpa obligationer från denna.

Som synes består restriktionen mellan flow-variablerna G och T samt *förändringarna* ΔM och ΔD i stock-variablerna M och D. För att man enligt Clower skall kunna tala om jämvikt i en modell med blandade stock- och flow-variabler måste inte bara de senare utan även de förra ha konstanta värden.[1] Skulle vi strikt följa denna definition skulle emellertid de statiska jämviktslägen som vi kan jämföra inom modellen avsevärt inskränkas till antalet. För att alla variablerna skall ha konstanta värden måste det gälla $\Delta M = 0$ och $\Delta D = 0$ — samt enligt (15) att $G = T$. Således kan vi i sådant fall endast undersöka skattefinansierade statsutgifter. När vi söker effekten på nationalinkomsten av en förändring i statens utgifter måste denna förändring neutraliseras av en motsvarande förändring av skatteuttaget så att budgetöverskott eller budgetunderskott ej uppstår, ty detta skulle föra med sig en för varje period upprepad kumulativ förändring i någon av stockvariablerna.

För att vi skall kunna diskutera effekten av statsutgifter vilka finansieras med lån i centralbanken eller hos allmänheten måste vi jämföra jämviktslägen som endast är temporära och där stock-variablerna ej behöver antaga konstanta värden. Ett sådant betraktelsesätt förefaller även naturligt inom ramen för vår makroekonomiska modell, ty den keynesianska teorin rör sig ju i huvudsak med sådana temporära jämviktslägen.[2]

Hur dessa jämviktslägen uppnås under varje period är emellertid inte lätt att förklara på ett tillfredsställande sätt. I dynamisk teori som utnyttjar jämviktsvillkor under de enskilda perioderna låter man i regel bli att förklara hur de enskilda periodernas jämviktslägen uppnås för att i stället bli i stånd att förklara förloppet av jämviktspriser under en sekvens av perioder. För de enskilda perioderna konstruerar man då eventuellt en tidlöst hastig process med försöksvis fastställda priser och »re-contracting» varigenom priset söker sig till sitt jämviktsläge. Denna process är visserligen logiskt oantastlig, men saknar varje verklighetsunderlag. Man tänker sig väl att förutsättningarna på ett idealiserat sätt svarar mot de skeenden i verkligheten varigenom priset under en period successivit söker sig till jämviktsläget. Att så skulle vara fallet har man visserligen inte visat, men

[1] Se Bushaw and Clower, »Introduction to Mathematical Economics», Homewood 1957, Chapter Two.

[2] Om detta se T. Palander, »Noter till Keynes», 1942, otryckt korrekturavdrag.

det finns heller inte något som direkt talar mot antagandet så länge man ej har att göra med »stock»-storheter.

Annorlunda förhåller det sig då systemet innehåller stock-marknader. De jämviktslägen som avser stock-marknaderna och som vi diskuterat kan *endast* uppnås genom en process med »re-contracting» så att inga verkliga transaktioner genomförs annat än till jämviktspriser. Skulle vi tillåta successiva anpassningar kommer — enligt vad vi har sett i föregående kapitel — jämviktsläget självt att bero på anpassningsprocessens karaktär. Följaktligen kan ett entydigt statiskt jämviktsläge ej definieras. Det jämviktsläge vilket uppnås genom en process av »re-contracting» behöver nämligen inte vara detsamma som det jämviktsläge vilket uppnås genom en viss process av successiva anpassningar. Härav följer att *för »stock»-marknaden själva den komparativt statiska metoden blir tvivelaktig i samma mån som antagandet om »re-contracting» är orealistiskt.* För att kunna fortsätta den påbörjade analysen skall vi emellertid anta att »re-contracting» är ett rimligt antagande.

Sålunda låter vi möjligheten $G \neq T$ kvarstå. För att ekvation (15) skall låta oss knyta ihop *förändringarna* ΔG och ΔT i flow-variablerna med förändringarna ΔM och ΔD i stock-variablerna skall vi dock anta att $G = T$ gäller i utgångsläget innan förändringen inträffar — så att vi erhåller

$$\Delta G = \Delta T + \Delta M + \Delta D \qquad (15\,a)$$

Detta samband gäller emellertid endast för den period då ändringen inträffar. Även om ingen ny förändring äger rum kommer ekvationen att för följande period ha formen $2\Delta G = 2\Delta T + \Delta M + \Delta D$; för därpå följande period $3\Delta G = 3\Delta T + \Delta M + \Delta D$ etc.

Låt oss nu söka multiplikatorerna mellan förändringar i nationalinkomst och statsutgifter i vissa fall med renodlade finansieringsformer. Vi tänker oss att statsutgifterna ökar med ΔG och att i det första fallet dessa finansieras med skatter, dvs. $\Delta T = \Delta G$. I det andra fallet finansieras de nya utgifterna med lån i centralbanken, dvs. med nya pengar. Då blir $\Delta M = \Delta G$. I det tredje fallet lånar staten hos allmänheten, dvs. ökar statsskulden genom att sälja nya obligationer, varvid $\Delta D = \Delta G$. I dessa fall söker vi multiplikatorn $\Delta Y / \Delta G$. Ett fjärde fall erhålles vid operationer i öppna marknaden, varvid $\Delta D = -\Delta M$. I detta fall söker vi $\Delta Y / \Delta M$, vilken anger påverkan på nationalinkomsten av operationer i öppna marknaden som ökar penningmängden.

För de olika fallen erhålles genom ekvation (14):

1) skattefinansiering ($\Delta T = \Delta G$)

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1 - C_Y}{1 - C_Y - \dfrac{I_i \cdot B_F \cdot k}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}$$

2) finansiering med nya pengar ($\Delta M = \Delta G$)

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1 - \dfrac{I_i \cdot B_F}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}{1 - C_Y - \dfrac{I_i \cdot B_F \cdot k}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}$$

3) lånefinansiering ($\Delta D = AG$)

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1 + \dfrac{I_i(1 - B_F)}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}{1 - C_Y - \dfrac{I_i \cdot B_F \cdot k}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}$$

4) »open market operations» ($\Delta D = -\Delta M$)

$$\frac{\Delta Y}{\Delta M} = \frac{-\dfrac{I_i}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}{1 - C_Y - \dfrac{I_i \cdot B_F \cdot k}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}}$$

För att tolka dessa multiplikatorer måste vi först ha reda på tecknen för uttrycken

$$\frac{I_i \cdot B_F \cdot k}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}, \quad \frac{I_i \cdot B_F}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}, \quad \frac{I_i(1 - B_F)}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}$$

och

$$\frac{I_i}{B_i + (1 - B_F) \cdot B \cdot p}$$

Ifall $I_i < 0, B_i > 0, 0 < B_F < 1, B \cdot p > 0$, blir samtliga dessa bråk negativa.

Därav ser vi att multiplikatorn i det första fallet är något mindre än 1, dvs. den är något mindre än den vanliga Haavelmo-multiplikatorn. Detta torde bero på att den högre nationalinkomsten fordrar mer pengar i transaktionskassa, vilka frigöras från spekulationskassorna vid en högre ränta. Den högre räntan reducerar emellertid investeringarna.

Vidare ser vi att multiplikatorerna i både första och tredje fallen är mindre än multiplikatorn i andra fallet. *Finansiering av ökade statsutgifter*

med nya pengar ger alltså större expansiva verkningar än finansiering med skatter och finansiering med nya obligationer.

Huruvida finansiering med skatter ger större eller mindre expansiva verkningar än finansiering med lån torde vara ovisst. Multiplikatorn 3) blir större respektive mindre än multiplikatorn 1) beroende på om det övre eller det nedre av olikhetstecknen gäller mellan följande uttryck.

$$\frac{C_Y}{(1-B_F)} \gtrless \frac{-I_i}{B_i+(1-B_F)B_p}$$

Därvid uttrycker C_Y den marginella konsumtionskvoten dC/dY, dvs. den andel av en marginell ökning i den disponibla inkomsten som konsumeras. På samma sätt uttrycker $(1-B_F)$ den marginella likviditetskvoten $\partial M_a/\partial F$, dvs. andelen av en marginell förmögenhetsökning som placeras i kontanter. Vänstra ledet blir således högt respektive lågt beroende på om den marginella konsumtionskvoten är hög eller låg i förhållande till den marginella likviditetskvoten. Högra ledets täljare uttrycker påverkan på investeringarna (med omvänt förtecken) av en marginell höjning i den effektiva obligationsräntan. Nämnaren $B_i+(1-B_F)\cdot B\cdot p$ anger förändringen i det värde allmänheten önskar hålla i obligationer som svarar mot en marginell höjning av effektiva obligationsräntan under hänsynstagande till att ränteförändringen även påverkar förmögenheternas värden. Högra ledet erhåller således ett högt eller lågt värde beroende på om en höjning av effektiva obligationsräntan påverkar investeringarna starkt eller svagt i förhållande till hur den påverkar det optimala värdet av obligationsportföljerna.

Resultatet blir att skattefinansiering har expansivare verkningar än lånefinansiering när den marginella konsumtionskvoten är låg i förhållande till den marginella likviditetskvoten och när ränteförändringar påverkar investeringarna förhållandevis kraftigare än de värden allmänheten önskar placera i obligationer. Däremot erhåller lånefinansiering kraftigare expansiv verkan än skattefinansiering när den marginella konsumtionskvoten är hög i förhållande till den marginella likviditetskvoten och när ränteförändringar påverkar investeringarna förhållandevis svagare än de värden allmänheten önskar placera i obligationer.

Om vi har att göra med det speciella keynesianska fallet där $I_i=0$ och $B_i=\infty$ ser vi att multiplikatorn i tredje fallet blir större än multiplikatorn i första fallet. I så fall har lånefinansiering bättre expansiv verkan än skattefinansiering. Faktiskt blir lånefinansiering och finansiering med nya pengar likvärdiga. Multiplikatorerna övergår till:

$$1\,a) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1 - C_Y}{1 - C_Y}$$

$$2\,a) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - C_Y}$$

$$3\,a) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - C_Y}$$

Vi kan som synes i detta speciella fall helt bortse från finanspolitikens likviditetsverkningar. Vidare blir operationer i öppna marknaden fullkomligt ineffektiva, dvs.

$$4\,a) \quad \frac{\Delta Y}{\Delta M} = 0$$

Det som ovan sagts rörande de allmänna fallen 1)–4) gäller endast under den allra första period då förändringen ΔG i statsutgifterna inträffar. I de fall då statsutgiftsökningen finansieras med nya obligationer eller nya pengar kommer — så länge budgetunderskottet består — obligations- eller penningmängden att fortsätta växa och ge upphov till nya likviditetsverkningar — ehuru statsutgifterna har upphört att växa och ej längre ger upphov till några direkta expansiva verkningar. I fallet 2) — då finansieringen sker med nya pengar måste effektiva obligationsräntan fortsätta att falla — vilket ju stimulerar investeringsverksamheten och därigenom indirekt utövar en expansiv effekt på nationalinkomsten. I fallet 3) — då finansieringen sker med nya obligationer — måste i stället effektiva obligationsräntan fortsätta att stiga — vilket hämmar investeringsverksamheten och därigenom indirekt utövar en kontraktiv effekt på nationalinkomsten. Det sagda betyder att den större expansiva styrkan vid finansiering med pengar i förhållande till finansiering med obligationer blir mer utpräglad när vi undersöker effekterna på längre sikt. Det sagda betyder även — eftersom den indirekt kontraktiva verkan förstärks med tiden vid finansiering med obligationer — att sett på längre sikt skattefinansiering kan verka expansivare än finansiering med obligationer i fler fall än som antagits ovan. I det speciella fallet med $I_i = 0$ och $B_i = \infty$ förändras ej slutsatserna eftersom då alla likviditetsverkningar försvinner.

Kapitel IX

SUMMARY

The problems discussed in this work concerned the optimal allocation of his wealth by a private economic subject between a number of different assets. Several different hypotheses concerning the character of these assets and the behaviour of the subject were discussed.

The simplest way of understanding real and financial investments is to regard them as something resulting in sequences of positive and negative net revenues, known in advance with perfect foresight, during consecutive periods of time. There has been a certain amount of disagreement as to which of the measures calculated from these sequences are to be the criteria of their profitability, but it has as a rule not been questioned that in such cases the choice of assets can be decided by calculation.

The criteria proposed are of various kinds. One type is based on the idea that on the whole the investments yield more in revenue than is required in expenditure, which introduces the phenomenon of "interest". It would be a matter of measuring this "internal rate of interest" for the alternatives compared, after which we could let its level decide the alternative to be selected. The meaning of the concept of "internal rate of interest" might be explained by the following analogy. At the end of each period, when the net revenue in the sequence representing a certain investment is negative, an equal amount is imagined as being deposited in a bank account; in the same way, at the end of each period, when the net revenue is positive, an equal amount is imagined as being drawn from this account. The amount on deposit grows by compound interest. The internal rate of interest is then equal to the interest which would have had to be paid in order that this bank account might again be reduced to zero by the last withdrawal in the sequence, if the credit balance was zero before the first payment. Several problems arise in the interpretation of this definition. Since the amount on deposit is to grow by compound interest, we must first state the intervals between the times when the interest is added to the capital. These intervals need not necessarily coincide with the periods used in the description of the net-revenue sequence of the investment. Furthermore we must assume

that the same interest will be paid for a debit balance as for a credit balance, if it can be expected that an overdraft on the "bank" will arise in any period. Finally it is possible that we may nevertheless get several numerical values for the internal rate of interest from a given sequence of net revenues, if the series is relatively irregular. It is clear that the internal rate of interest is an artificial concept for the purpose of calculation and has been defined for investments with fixed net-revenue sequences by an obscure analogy between, on the one hand, these investments with fixed net-revenue sequences and, on the other, bank deposits with freedom of option in the sequences of deposits and withdrawals at a fixed rate of interest.

For deposits in a bank account, the interest is, of course, fixed by the bank, whilst the depositor himself can determine the time distribution of deposits and withdrawals within a wide framework, which may consist, for example, in the stipulation that the account must not be overdrawn or exceed a certain amount, in stated requirements as regards the period of notice for large withdrawals, etc. The interest is conceived of as a price paid for a homogeneous good. This good is the right of disposal over cash for a certain period. When the "price" is given, the depositor himself may determine the amounts over which he will transfer the right of disposal for different periods.

Investments in production processes or in securities, such as bonds and shares, do not give such freedom of option. In the absence of uncertainty such commitments have been assumed to lead to definite sequences of negative and positive net revenues. We can, it is true, calculate the internal rate of interest in the way mentioned above, but the investor can no longer himself determine the distribution in time of the amounts over which he will transfer the right of disposal at a given rate of interest. The opportunity of engaging in an investment thus involves a fixed option, in the same way as the offer to buy a certain quantity of goods for a certain sum of money. It is not self-evident that we shall choose one of two alternative quantities of goods offered for sale merely because the unit price happens to be cheaper; it should be no more self-evident that we shall choose a certain investment alternative merely because the internal rate of interest happens to be higher. To put it in another way, the investments cannot be reduced to the homogeneous category of goods which we have called "right of disposal over cash" with a price which has a real meaning, since they represent positive and negative payments distributed in time in a definite manner. This would only be possible if in each period there were a market for the different investments and the future prices on these markets could be predicted with certainty. In such cases of complete knowledge, however, all

investment calculations would be pointless, as it would be trivial to decide which investment would be most profitable in each period.

One reason which particularly argues against the use of the internal rate of interest as a criterion for the choice of investment is that the maximization of this rate of interest corresponds to a non-transitive preference relation between the net-revenue sequences. The reason for this is as follows. The accumulation factor corresponding to the internal rate of interest is obtained as a solution of polynomial equations, the coefficients of which are the different net revenues in the sequence corresponding to a certain investment. There is nothing to prevent such an equation having several different solutions, which means that a certain sequence of net revenues may yield several different values for the internal rate of interest. To put it another way, this means that, when the internal rate of interest determines the order of preference, certain investments correspond to several preference levels. In particular it is true that the alternative in which no investment is chosen leads precisely to every conceivable value of the internal rate of interest, owing to the fact that the polynomial equation is satisfied for every arbitrary value of the unknown variable, when all the coefficients are zero. This means that investments which are not in themselves equivalent, owing to the fact that they yield different rates of interest, may be equivalent to one and the same investment alternative. This, however, clearly conflicts with the assumption of transitivity which is usually made for all rational preferences.

From the preference point of view a sequence of net revenues may be regarded as having the same character as a collection of physically different kinds of goods. The different "goods" are represented in this case by amounts of money located in different periods of time. This type of analogy leads to the other suggested main criterion for the objective ordering of net-revenue series. Just as heterogeneous collections of goods can be valued with the aid of the market prices of the different goods, it should conceivably be possible to value sequences of net revenues in the same way. When we value a collection of physically different goods, we do so, as a rule, by calculating its equivalent in money. However, we could just as well have calculated the equivalent as a quantity of one of the different kinds of goods included in the collection. The valuation would then, of course, not have been carried out with the aid of the money prices of the different goods but instead with the aid of their respective exchange rates in relation to the kind of goods in which the value of the collection was expressed, by which means this value would have come to depend on which kind of goods was chosen as "numéraire". This is how we proceed to calculate the capital value of a

net-revenue sequence, which, of course, expresses the equivalent of the whole sequence as a sum of money located in some definite period. The capital value must be referred to some particular period, just as the goods in which the heterogeneous collection is valued must be particularly stated. Thus it is not sufficient to state that the valuation shall be made in money, for all the different "goods" are amounts of money and only differ as regards the period to which they belong. It is usual to calculate the capital value at the time when the investment activity is considered to begin, when it is given the designation of "present value". The exchange rates for the net revenues of the later periods in relation to the net revenue for the period preceding the first period of investment activity are then called "discount factors". The investment, amongst several alternatives, which has the highest present capital value is assumed to be chosen. In this connection it should be observed that the capital values of all the alternatives compared should be calculated for one and the same time period. Otherwise the comparison will be equivalent to a comparison of the equivalents of alternative collections of goods expressed as quantities of various kinds of goods.

The reason why a net-revenue sequence with a maximum capital value should be chosen can also be found by reference to the case with heterogeneous collections of goods. If there are markets for each of the different kinds of goods, in which they can be sold and bought freely at fixed prices, it is always reasonable to choose the collection which is equivalent to the maximum quantity of the goods in which we have chosen to make the valuations. It is immaterial, in this connection, which kind of goods we have chosen for this purpose, for when a certain collection is equivalent to the maximum quantity of a certain kind of goods, the same also applies to valuing in the other kinds of goods.

The reason for preferring collections with a greater market value in a case like this is obvious. It is true that we wish, as a rule, not only to receive as much as possible of the goods in which the valuation is made, but, whichever preferences for different collections of goods we satisfy, we can get by market exchange objectively more preferable collections, if we originally have at our disposal a larger quantity of the goods in which the valuation is made. In this connection, an objectively more profitable collection is assumed to be one which contains more of at least one kind of goods without containing less of the others. This applies, however, only if all desired exchanges of goods can really be made at constant exchange rates.

The same can be said in a choice between different net-revenue sequences, i.e. that the capital values must express the profitability of the different sequences, when borrowing and lending can take place freely at a constant

rate of interest for each period. In reality, however, these conditions are hardly ever fulfilled. On the market for buying and selling promises concerning future sums of money the prices vary, depending on whether one is a buyer or a seller and on how much one wants to buy or sell. In simplified theoretical models, in which only one rate of interest is assumed to exist for each period, the prospect that the capital value will be maximized seems quite reasonable, a conclusion which cannot simply be assumed to apply under more realistic conditions. This also means that the capital values must be calculated with the aid of the rates of interest in real markets, which the investor is assumed to have access to. Thus it is not, as a rule, good enough to make the calculations with some kind of subjective rates of interest which the investor would "require".

One exception is the case in which the preference system is of such a special form that the indifference loci are parallel hyperplanes. The subjective "rate of time preference" will then be constant in movements both at each indifference locus and between different indifference loci. However, there is no reason why the special form should be particularly likely in itself. Furthermore, it leads to very peculiar results in the cases in which the preference system is to determine an optimal distribution of consumption in time and in which depositing and lending can take place on an unrestricted scale at one and the same constant rate of interest. No optimum can then be determined, for either the "rate of time preference" coincides with the market rate and in that case all points in the possibility set of the budget restriction are equivalent or else they do not coincide and then the stimulus to borrowing and lending remains in unaltered force, irrespective of the extent to which such borrowing and lending has already occurred.

We started from the proposition that each investor has a complete subjective ordering for different sequences of net revenues. We assumed that one sequence must always be preferred to another, if it means for at least one period a more favourable (i.e. greater positive or smaller negative) net revenue, without involving a more unfavourable net revenue in any of the other periods. If this applies to two sequences of net revenues, we said that an objective preference relation exists between them. It is trivial that in this case the internal rate of interest is greater for the sequence that is objectively more preferable. On the other hand, in the non-trivial cases the opposite need not be true, i.e. that a sequence with a greater internal rate of interest will always be preferable when it means more favourable net revenues in some periods and more unfavourable net revenues in the others.

However, in reality the investors have at their disposal not only the fixed

net-revenue sequences represented by the different investments but the opportunity of transforming these sequences in different ways, by borrowing from or lending to a bank. The choice then applies not to the fixed sequences as such but rather to the sets including the fixed sequences and all their respective possible transformations. Now the possibilities of transformation may conceivably be such that, for each transformed sequence of net revenues which the choice of a certain investment makes possible, there are transformed sequences, made possible by the choice of another investment, which are objectively more preferable, in accordance with the relation we defined above. We call such a relation an "objective preference relation" between investments. When the textbooks on investment calculations recommend the internal rate of interest as the criterion of choice, they must actually be making an implicit assumption that the possibilities of transformation are such that an objective order of preference applies between the sets of fixed and transformed net-revenue sequences and that this objective order of preference can also be indicated by the magnitude of the capital values of the investments. This agrees with what was mentioned earlier about the cases in which the market values of heterogeneous collections of goods express their profitability objectively. We could also say that the objective preference relation between investments expresses a kind of Pareto optimality, as the time-located net revenues for one person are no more comparable than the revenues of different persons in the same period.

However, it seemed hazardous to make the implicit assumption that objective preference relations exist, for in this way we might be misled into thinking that interest calculations always have an objective meaning, independently of the subjective preferences, and thus into applying them mechanically even in cases in which this procedure is illegitimate. We therefore explicitly investigated the conditions in some different types of transformation possibilities, instead of cloaking the problem in obscurity as to what the rate of interest used in calculations really means.

We compared under the conditions stated two investment alternatives, in order to investigate when either of them was objectively to be preferred. In doing so, we also covered the problem of deciding when it is objectively to be considered profitable to make a certain investment, since we could let one of the "investments" compared be represented by the sequence of payments of zero amounts which arises when one does not commit oneself to any investment at all.

What we were looking for was objective preference relations between investments, such as could be said to apply without regard to the more specific characteristics of the preference orderings of individual subjects.

All conceivable preference orderings for time distributions of consumption values would have certain features in common. Of two consumption values, one of which meant a greater consumption value for at least one period without meaning a less consumption value in any other period, a certain distribution must be preferred, irrespective of the character of the order of preference in other respects. If now the choice of an investment should make possible consumption distributions, amongst which, for each consumption distribution made possible by the choice of another investment, there is at least one distribution which must be preferred in this way, naturally the former investment would be chosen. This was the condition for the existence of an objective preference relation between two investments and thus for the possibility of making the decision to invest independently of the decision as to the distribution of the consumption in time.

Which the possible consumption distributions corresponding to the choice of the respective investments were to be was determined by the other borrowing and lending opportunities. We came to the conclusion that there would be an objective relation of preference between two investments if, and only if, the capital value of one investment was greater in every possible method of calculating the capital value, in which each method of calculation corresponded to a particular combination of the different rates of interest which applied in different periods. Thus the well-known capital-value criterion in a way becomes really applicable. But the problem which arises when in each period there is a number of different rates of interest for different amounts borrowed or lent cannot be solved by replacing the whole of this number of different rates of interest by a single subjective rate of interest used in calculations. Instead the correct solution is that the capital value of an investment is not uniquely defined. For an investment to be objectively preferable, it is necessary that its capital value shall be greater in every possible method of calculation. Naturally a series of cases now arises in which this condition does not apply and in which we cannot speak objectively at all about which of two investments is to be preferred. The decision to invest cannot accordingly be made independently of the decision to consume. Or, to put it another way, knowing only the partial objective preference ordering of consumption distributions in time, we cannot state which investment is to be chosen; for this, knowledge of the complete subjective preference ordering is required.

The only thing that can be said objectively in such cases applieds when a certain decision to invest appears together with a definite decision as to the consumption distribution in time and accordingly together with a definite decision as to the sequence of bank deposits and withdrawals. In this con-

nection we can state when it would have been objectively more preferable to choose another investment. The other investment will have to be chosen in the cases in which the capital value of the sequence of bank deposits and withdrawals is less than the capital value of the difference investment between the other investment and the one which was chosen from the beginning. This stipulation for the capital value will again have to be fulfilled in all conceivable definitions of capital value.

Thus it seems that investment calculations which lead to objective results as to the profitability of the different investments can only be applied in special cases. Our problem was also to investigate to what extent the internal or effective rate of interest could be expected to be the criterion for an objective ordering of preference between investments. The condition required for this to be the case was, however, such that it could scarcely be imagined to be fulfilled in reality. An investment among two alternatives would be objectively preferable when it had a higher effective rate of interest, if all conceivable rates of interest for lending and borrowing had values between the effective rates of interest of the investments compared. This means that we have not found much proof that a decision to invest must be made on purely objective indications and still less proof that these indications consist of the values of the effective rates of interest.

However, it should be pointed out that we have not thereby answered in the negative the question of whether there is any clear connection between the holding of a bond and its yield to maturity or effective rate of interest. In order to solve this problem, we require a complete analysis of a portfolio optimum and its dependence on the prices of the bonds. The aim is then to make up with a given amount of wealth a portfolio of different bonds, designed to be retained until their respective dates of maturity, in such a way that the revenue sequence of the combined portfolio satisfies as well as possible a given system of preferences for the distribution of the consumption in time.

The usual method of determining an optimal combination of quantities of goods which can be purchased at known market prices is then not applicable, owing to the fact that in the actual case the goods which can be purchased on the market are not directly included in the utility function but contain the arguments included in it in the different fixed combinations. The discussion was therefore carried on with a combination of lines of thought taken from ordinary marginal analysis and linear programming.

The discussion then started on the assumption that there were no possibilities of borrowing from and lending to a bank alongside the bond investments. For this case we were able to conclude that portfolios made up of

more different types of bonds than the number of variables in the utility function would never be profitable. In this connection the bonds were regarded as different if no type of bond could be interpreted as a portfolio composed of the other types of bond.

It may be worth emphasizing one particular implication of this reasoning, namely, that mixed portfolios may in fact be profitable. The general lack of reason for making up mixed portfolios in absence of risk has, of course, generally been interpreted as one of the reasons why the uncertainty factors should be taken into consideration.

Though it might not be profitable to purchase more different bonds than the number of variables in the utility function, it might well be imagined that fewer different bonds should be included in the optimal portfolio. On account of the simplicity of the case the discussion began, however, with the somewhat unrealistic assumption that exactly as many different bonds as the number of variables in the utility function should be included in the optimal portfolio. Then for each such portfolio we could calculate a kind of "imputed prices" for the variables in the utility function, i.e. for the values of consumption in different periods. These "imputed prices" were a kind of discount factors, which stated the sacrifices which must be made immediately, in order to be able partially to increase the consumption by one value unit in each of the different periods. With the aid of these discount factors it was possible to calculate the present values of different sequences of payments. These discount factors had characteristics such that the present values of the revenue sequences for each of the bonds included in the portfolio would be equal to their respective prices. In order that a certain portfolio should be optimal, it was required that none of the excluded bonds should have a capital value, calculated from its own revenues with the aid of the portfolio's "imputed" discount factors, greater than its own price.

Thus, since it was possible to calculate "imputed" or "shadow" prices for the variables of the utility function, the problem could be discussed in the ordinary way by maximizing a utility function under a linear restriction. After the optimum had been determined, the optimum equations were differentiated for an investigation of how the consumption of different periods would be affected by changes in their shadow prices. It then turned out that an increase in the shadow price for the consumption in a certain period must always restrict the consumption in that period. This conclusion could be deduced with the aid of second-order conditions for an optimum. Furthermore, it could be expected *a priori* that consumption in the other periods would tend to increase; this was connected with the fact that the consumptions in the different periods were assumed to have a substitutive

relationship to each other. The unambiguous conclusions are due to the fact that the substitution effect was the only effect of the change in the shadow price when the wealth was optimally made up before the change. Equivalents of the income effects, which disturb the unambiguity of the conclusions in the ordinary consumption theory, are accordingly never current in the case discussed.

However, we are not much helped by the unambiguous results, showing how the consumption in different periods is affected by changes in the shadow prices. What is interesting is how the demand for bonds is affected by the market prices of bonds. A change in the price of a bond, however, affects all shadow prices and the change in demand for a bond depends on all the changes in the consumption in the different periods which it is desired to make. There are in general too many unknown factors here to enable us to state any clear effect on the demand for a certain bond arising from changes in the price.

On the special assumptions that there is in the portfolio precisely one type of bond which matures in each of the periods whose consumption is included as a variable in the utility function and that the coupons are so small in comparison with the redemption values that they can be neglected, unambiguous conclusions can be reached. The "imputed price" will then be appreciably changed only for the period during which the bond whose price has been changed is redeemed. Furthermore, the demand for a certain bond will be appreciably affected only by the consumption in the period when the bond is redeemed. We can therefore say that the demand for a certain bond is affected by changes in its price in the same way as the consumption during the period when the first-mentioned bond is redeemed is affected by changes in the shadow price for the consumption during the period when the last-mentioned bond is redeemed. Accordingly then the demand for a bond would decrease when its own price rose and increase when the price of another bond rose. However, this conclusion can only be drawn for the special case.

The conclusions which apply when the number of different bonds purchased is equal to the number of variables in the utility function could then easily be extended to the case in which fewer bonds are included in the optimal portfolio. In doing so, it was not possible simply to calculate unique "imputed prices" for the consumption in the different periods. Technically, the problem could be solved, as before, by introducing as many "dummy" bonds, not in fact purchased, as were necessary for the total number of bonds to equal the number of periods in the utility function. Definite values of the shadow prices could be obtained by this arrangement

and the problem was again the maximization of the utility function under secondary conditions. There were, however, several secondary conditions, since the quantities of "dummy" bonds, not in fact purchased, had to be set at zero. The results as regards how the demand for bonds would be affected by the changes in the prices were the same as before, though the mathematical conditions were of a more complicated character.

The same could be said of the case in which opportunities of borrowing from and lending to a bank were introduced alongside the bond investments. It might then be profitable to change the number of different bonds in the portfolio, but the conclusions from the comparative statics discussion were the same as before.

The whole discussion of optimal selection of assets which pre-supposes "perfect foresight" is extremely unrealistic, owing to the fact that the element of uncertainty is neglected. The modern theory of "portfolio selection" has, however, given us an opportunity of investigating the present problem even when uncertainty prevails.

Our problem, to begin with, was to investigate how an individual subject distributes his wealth between two different assets in a given investment period. In the most general case it was for the subject also to determine whether he will immediately consume his wealth wholly or partially and thus spend more than his current income or whether he will save a part of his income in order instead to increase his wealth. The wealth serves the purpose of transferring purchasing power to the future. The subject has accordingly to weigh the advantages of large immediate consumption against the advantages of large future potential consumption. At the same time, since we assume that at least one of the assets has an uncertain future market value, he must also weigh the advantages of securely allocated wealth against the advantages of wealth that is, on the average, largely invested.

We have assumed that the only magnitudes relevant to the subject's preferences are, on the one hand, the value of the immediate consumption and, on the other, the value available for consumption at the end of the investment period. The subject can freely determine the former value within the framework formed by his initial wealth and his current income. On the other hand, he cannot determine the latter value otherwise than indirectly, by settling the distribution between the two assets of what remains of his income and wealth after the immediate consumption. He does not know with certainty what the market value of his wealth made up in a certain way will be at the end of the investment period, for this depends on the uncertain future prices of the assets. However, he is assumed to have

expectations as quantitatively expressed probabilities for every possible combination of future asset prices. Consequently he can give a probability distribution for the future value of the wealth in every combination of asset quantities.

We have assumed that such a probability distribution is estimated according to the mean, as a measure of the average and the variance, as a measure of the uncertainty. A high average expectation was assumed to be desirable, while it was assumed that the uncertainty should be reduced as much as possible. Among our assumptions as to the character of the choices made between alternatives with uncertain consequences, there is also the "expected utility" doctrine, which in its new axiomatic form is so widespread in the literature on economic risk situations that we scarcely need to give any particular justification for its use.

However, it should be observed that the combination of assumptions leads to very great risk aversion, which actually increases with increasing wealth. In order to get rid of this, we have assumed in parts of the exposition that the subject estimates the probability distributions not only with regard to the mean value and variance but also that he needs to know the third central moment, as a measure of the skewness in the probability distribution. A positive skewness means that the probability mass for values above the mean is extended over a larger interval than the probability mass for values below the mean. Since this means a risk for values much below the average, which is insignificant in comparison with the chances of very high values, a high third moment is in itself desirable. It appears that with this modification we produce a risk aversion which, if desired, can be made to decrease with increasing wealth.

We began by investigating the problem of the allocation of a given wealth at given asset prices. Among the possible combinations of asset quantities the subject was accordingly assumed to choose that which led to what was in his opinion the most preferable combination of the values of the mean and the variance. We obtained a determinate optimum on the assumption of risk-aversion. This optimum could, of course, conceivably mean a negative quantity for one of the assets. If there were institutional obstacles in such a case to borrowing by issuing own bonds, with the same expectations for their future market value as for that of the assets, the optimum could not be achieved. The best possible method of arranging the wealth would then be to hold only one type of bonds for whole intervals of relative asset prices. With a risk-preference, on the other hand, there would be no definite optimum at all; the subject could improve the situation without limitation by borrowing on the one asset in order to invest in the other. In the case of

institutional obstacles to borrowing there would also be a definite best possible arrangement, consisting in holding only one asset. However, there is in this case no interval for relative prices within which asset mixing is contemplated. If the ratio between the asset prices passes a certain critical value, the whole wealth is transferred from one asset to the other.

It was then a matter of inquiring how changes in the wealth to be invested or in the asset prices would influence the composition of the wealth. As regards the effect of changes in the value of the wealth, we could not arrive at any unambiguous conclusion. It could be imagined that one of the assets would react as an "inferior good". With a high correlation coefficient the asset with the largest variation coefficient would always do so from a certain amount of wealth upwards, if it was at all in demand with any value of wealth. That the more uncertain asset would only be held with small values of wealth seems to be an unreasonable conclusion connected with the drastic risk-aversion assumptions.

On the other hand, we could be certain of the effect, as regards changes in the asset prices at given expectations. Bearing in mind the rules of consumption theory, this may appear strange, as we have just maintained that we do not know the tendency of the counterpart to the income effect in the consumption theory. However, in the asset-optimization problem we have two kinds of income effects, one connected with the fact that the purchasing power of a given amount of money in relation to assets is altered by the asset prices and another due to the fact that the actual money value of the wealth is changed if the wealth already consists beforehand of the assets whose prices have been altered. If, at the moment an alteration occurs, the subject has his wealth optimally arranged, the two income effects neutralize each other and there remains only a substitution effect benefitting the asset which has become relatively cheaper.

Now we could scarcely expect that the preference system would be independent of the actual prices of the assets. The purpose of the assets was, of course, to transfer purchasing power to the future, and in so far as the expectations of their future value were affected by the actual prices, the preference system itself would be altered by the asset prices. We began to analyze what kind of difference elasticity of expectations would make. The problem was defined in such a way that all possible future values of an asset would be changed in one and the same proportion, the ratio of which to the relative change in the actual price of this or the other asset was given by the respective elasticities of expectations. The uncertainty conceived as variation coefficients would, on the other hand, not be affected, nor would the correlation coefficient. A positive elasticity between the actual price of an

asset and its expected future price would counteract the substitution mentioned in the previous paragraph, provided that the demand with a wealth of fixed monetary value for the asset whose price has fallen increases proportionately more than the price falls. The condition can also be formulated by saying that a larger fraction of a wealth of given money value should be invested in an asset the lower the price of the asset falls.

We cannot be entirely certain that the condition is valid. The fall in price would certainly stimulate the demand for an asset in an optimally arranged wealth, but, in order that the value of the wealth may be kept constant, the initial asset quantities must be altered, so that the fall in price is counteracted. There consequently arises an income effect whose direction we do not know. However, it seems reasonable in itself that a larger portion of a given wealth should be invested in the relatively cheaper asset. From this it follows that positive elasticity between the actual value of an asset and its expected value counteracts the substitution which benefits the relatively cheaper asset. However, positive elasticity of expectations has a contrary effect crosswise between the assets, so that the substitution is reinforced. How elasticity of expectations on the whole influences the substitution cannot therefore be decided unambiguously.

Now it could also be imagined that the uncertainty was affected by changes in the actual asset prices. The adherents of the "availability" doctrine assert that the uncertainty will always be increased by every price change. However, this argument hardly seems to apply except in a situation in which the monetary authorities are just beginning to carry on an active monetary policy after a long period of stable rates of interest.

We can, however, no more be perfectly certain of the effect of the price changes on the uncertainty than we can know the effect of increased uncertainty on the subject's optimum. It is clear from our investigation that an increase in risk for an asset leads in most cases to a reduced holding of the asset whose uncertainty has increased. If, however, the correlation is high, the uncertainty, interpreted as the variance per unit of money value invested, is very different for the two assets and if the wealth is largely invested in the more secure asset, an increase of variance for the more secure asset will lead to an increased holding of it. That this is so should not surprise us, for the increase in uncertainty for the future wealth, to which the increase in the uncertainty of the more secure asset is a liability, can, of course, be reduced just by increasing the holding of the asset whose uncertainty has increased. If there is an increase in uncertainty as a result of a change in the price of an asset, this will very likely apply to both assets. In most cases they counteract each other. However, cases may be imagined

in which the increases in uncertainty for both the assets combine to bring about a substitution for the benefit of the more secure asset.

Finally we gave up the assumption that there was a given wealth to be invested. The actual amount of wealth to be invested was dependent on the value to be consumed immediately. On the other hand, we re-adopted the assumptions as to unaffected expectations and uncertainty, in order to discuss the new problem. It turned out that in the general case we could scarcely say more than that the demand for an asset would decrease when its own price was raised. By introducing a special condition, to the effect that the optimal arrangement of a given amount of wealth at given asset prices and expectations would not be dependent on the consumption standard, we could obtain considerably less ambiguous conclusions. Price increases for an asset would then lead not only to a reduced holding of it but would also increase the holding of the other asset and also increase the immediate consumption, provided that the asset whose price had risen was not an "inferior good". If the price of an asset which is "inferior" rises, the immediate consumption will decrease. Increases of income lead to increased consumption and increased holding of the assets which are not "inferior goods".

Our next problem then was to construct a theory for optimal investment in bonds, with uncertainty in the case in which the investor is not only interested in the value of the invested wealth at a single point of time but formulates his preferences for the sequence of consumed values which is determined by his purchase and sale of bonds in the periods covered by the planning and by the growth in market value of these bonds. This will be rather complicated, since the investor can neither decide for a period at a time, independently of his future decisions, nor make a simultaneous decision for the forms of investment in all periods. Even if the investor's expectations of the growth in market value are not changed in the course of time, he will, if he does not restrict his future arrangements, be able to exploit the reduction in uncertainty which the knowledge of a part of the subsequent development involves. Thus his planning for the future would seem to take the form of a strategy prescribing alternative decisions for the future forms of investment, depending on the actual developments up to the times when the decisions are to be made. The decision on the investment to be made immediately thus depends on these conditional plans for the investor's future actions. From this it follows that the actual forms of investment will neither depend solely on the price expectations nor solely on the actual price developments but on the two factors in combination.

We earlier considered optimal action in an isolated period. It then seemed

natural to assume a gradual adaptation of the actual value and composition of the wealth to the optimum at each small change in the bond price. Since we could then assume that the initial holding at the beginning of the period and the optimal holding at the end of the period would coincide for each bond, all income effects could be neglected. The greatest difference in dynamic planning over a sequence of periods—in which the wealth is gradually changed in amount and composition—in relation to the earlier discussion consists in the fact that we can no longer neglect the income effects.

Expressed more exactly, it depends on what changes we wish to investigate whether the income effects can be neglected or not. If we wish to investigate the effect of a price change at the beginning of a period *before* the investor has yet adapted his optimum to the new period's price before the change, then the income effects must not be neglected. This corresponds to a *comparative statics* presentation of the problem, in which we discuss *alternative but simultaneous situations*, in which the bond prices are different. If, on the other hand, we wish to investigate a *dynamic* process of *consecutive situations in time* with different bond prices, then it is natural to imagine a gradual adaptation. If this adaptation takes place continuously at each little change, we can neglect the income effects.

However, the theory has been designed for a discrete process of decision, in which the time has been divided up into a number of periods, during which no new decisions are made and no new changes in the bond prices occur. A single decision is made at the beginning of each period and the bond prices are changed only at the change from one period to another. (All payments occasioned by the decision made at the beginning of each period are made at the end of the period before the bond price is changed, but this has nothing to do with the question under discussion concerning the decision-making process.) Thus it is contrary to the conditions of the theory to discuss consecutive changes in an individual period. This dynamic question comes in when we consider a series of consecutive periods. On the other hand, the comparative statics effects discussed in this chapter can only refer to alternative and simultaneous situations with infinitesimal differences in the bond prices.

The income effects can therefore no longer be neglected, for, as a result of the fact that the decision-making process is discrete, the changes in the value and composition of the wealth as between different periods will be finite, so that no assumption can be made as to equality between the actual bond holding at the beginning of the period and the optimal holding at the end of the period. From this it then also follows that the effects of changed bond prices on the holdings of bonds and cash will be extremely uncertain.

As was pointed out previously, it is the income effects that produce this ambiguity. We have argued that we cannot neglect these, in discussing an individual's actions. It may be different if we interest ourselves in a group of individuals, some of whom are busy building up wealth for the purpose of spending it later, some of whom are spending wealth they have built up earlier and others are largely contenting themselves with spending each period's income and making any necessary small transfers of purchasing power between different periods by holding cash. The last-mentioned category is fairly uninteresting, but if we can assume that the first two categories largely counterbalance each other, the income effects can probably be left out of account when we are investigating the effect on the aggregated magnitudes, quantity of bonds, amount of cash and consumption. If we can make this assumption, it follows that the bond holding is reduced, the cash holding is increased and the consumption is increased by an increased bond price.

The previous discussion on an investor's optimum in dynamic planning of consumption, bond holding and cash holding under uncertainty as regards the development of the bond price has shown that the demand for bonds and cash—intended to be left at the end of a certain period—depends on the wealth left from the immediately preceding period, on the current bond price and on the expectation situation determined by the earlier development of the bond price up to and including the current period. Thus we can say that we have derived demand functions for bonds and cash with the current bond price as variable—when the earlier price development and the initial wealth are assumed to be given. The comparative statics analysis has also revealed some of the signs of the first derivates of the functions. However, it is important to realize the character of these demand functions and the nature of the questions for which they have any relevance.

It was pointed out that the functions appertaining to a certain period express the demand for bonds and cash in alternative and simultaneous situations, characterized by different bond prices. Thus they cannot be used to discuss the effects of consecutive changes in the bond price. The very construction of the theory is such that only one change in the bond price and one consumption and investment decision corresponding to it falls in each period. From this it follows that we can only discuss the whole sequence of events if we consider the decision-making process during a series of several periods.

It may now be advantageous to discuss the character of the demand function more loosely, without any direct reference to the special decision model. In this way we can find certain basic differences between the de-

mand functions for stock and flow which do not originate in special assumptions concerning the character of the dynamic decision-making process.

The usual single-period consumption theory allows us to determine the optimal demand for a certain kind of goods with a given preference system, a given income and given prices of consumer goods. By assuming the preference system, the income and the prices of the other consumer goods to remain unchanged and varying the actual price of the individual goods, we can determine a demand function for the individual goods with its price as a variable. As the discussion relates to a single period, the demand function should, strictly speaking, refer to alternative and simultaneous situations with different prices for the goods in question. If we imagine, however, that the preferences, the income and the other prices are unchanged for a series of periods, we can, with the help of the derived demand function, also discuss consecutive events forming a series of changes in the actual price of the goods in question. When we wish to use the demand function in a dynamic model, the different variables are dated and will then either belong to the same period or to different periods, if there should be any special reasons for so-called "lags". The static demand function, dynamized in this way, is otherwise unchanged in the process.

By adding other behaviour functions—dynamized in the same way—and equilibrium conditions or special dynamic relations which may express, for example, the adjustment of the market price as depending on the excess demand or excess supply, we obtain a dynamic market model. In such a model the subsequent development of the different variables is entirely determined by their earlier development up to and including the initial situation. The static question is matched by special cases of the dynamic question, when we are only concerned with processes in which the different variables keep stationary values. An equilibrium position in the static theory corresponds to a stationary process like this in the dynamic theory. If we are only interested in stationary processes, it is immaterial whether we use dynamic or static theory. When the variables have stationary values, the dating will be superfluous and the dynamic functions which give the adjustment of the market price with regard to the excess of supply or demand will break down into simple equilibrium conditions.

If now we can assume that every dynamic process in a model has a natural disposition, in the absence of external disturbances, to tend towards a stationary process, it is obvious that the static analysis expresses a real tendency in the long run. The dynamic analysis in this connection is a means of making sure that divergencies from the stationary process are

only temporary in a system left to itself and that the static analysis is consequently relevant in the discussion of conditions in the long run.

This applies, however, only on a condition which has met with surprisingly little interest, namely, that the forms of the behaviour functions themselves do not depend on the nature of the dynamic process. We have argued above that the demand function for a kind of consumer goods with its own price as variabl ecan be expected to be unchanged from period to period.

It is different, however, when we have to do with the demand function for, for example, a bond with its price as a variable. We have already pointed out that the demand function also depends on the initial wealth. As soon as the wealth is optimally adapted to the bond price in a certain period, the initial wealth for the next period will, of course, be changed and thereby also the demand function for the latter period. When we have to do with "flow" magnitudes, these magnitudes are connected only with the periods to which they belong. The "stock" magnitudes, on the other hand, form links between the periods and allow the actions of the previous periods to influence what are to be optimal actions for the later periods.

To this must be added the circumstance that financial assets do not have any utility in themselves but are used to transfer purchasing power to the future. The advantage of possessing financial assets is derived from the purchasing power they are expected to have in the future in relation to consumer goods. These expectations are, however, dependent on the current bond price and on the previous price development.

Thus we can say that, even though the demand function for a bond with its price as a variable should be unchanged from period to period on the assumption that the initial wealth and the expectations were unchanged, we cannot expect the same during a dynamic process, in which the bond price varies and the wealth is adapted to the variations in the price.

In particular it is true to say that changes during a period along the demand function are not reversible. Let us say that the bond price rises in one period in relation to the immediately preceding period and in the period immediately following again falls to the initial level. We then compare the decision made during the latter period with the decision which should have been made during that period if the rise in price had never occurred. If the price rises and the wealth is adapted to the increased price, the wealth will not have the same value as before the increase, when the price returns to its original level. Furthermore, it is obvious that a rise in price with a regression must produce a different expectation situation than if the price had remained at its former level. There is then no reason to expect the same decision after a price change with regression as with an unchanged price.

But it follows from this that we cannot, on the whole, define demand functions for stocks which can be expected to retain their form independently of the dynamic process. Consequently we must either keep to a genuinely static framing of the question and discuss alternative events during one and the same period or else construct a dynamic theory, in which the form of the demand functions varies and is dependent on the dynamic process itself. In a real stationary process in the dynamic model, in which both bond price and wealth remain constant, the uncertainty will vanish and the constant wealth will play so passive a part that all typical features of the "stock" theory will disappear. In this case we can obviously define demand functions which retain their given form during the process, in which a static analysis will again become equivalent to the dynamic.

However, we have no direct reason in this case to expect any automatic tendency for the dynamic process to become stationary in a system left to itself, and therefore the static demand functions for stocks can hardly be used for anything other than discussion of alternative and simultaneous non-recurrent changes in the bond price.

FÖRTECKNING ÖVER VIKTIGARE SYMBOLER

I denna förteckning har ej upptagits sådana symboler, vilka endast förekommer i matematiska härledningar av lemmasatser, eller sådana, vilka saknar omedelbar ekonomisk tolkning. Förteckningen är uppställd kapitelvis. Sådana delar av framställningen har helt utelämnats där de förekommande symbolerna är få. Det sagda gäller även de symboler, som endast förekommer i kortare partier av boken och där det ej bereder läsaren några svårigheter att finna definitionerna i den löpande texten.

Kap. II: 2–5

$\mathbf{y} = [y_1, ..., y_m]$ Vektor av nettointäkter under perioderna $1, ..., m$ från sådan verksamhet som är oberoende av det övervägda investeringsbeslutet. Ingångsförmögenheten inkluderas i vektorns första komponent. Betalningarna inträffar vid periodsluten.

$\mathbf{c} = [c_1, ..., c_m]$ Vektor av konsumerade värden under perioderna $1, ..., m$. Köpta konsumtionsvaror betalas vid periodsluten.

$\mathbf{x} = [x_1, ..., x_m]$ Vektor av nettointäkter från den övervägda investeringsverksamheten vilka erhålles vid sluten av perioderna $1, ..., m$.

$\mathbf{z} = [z_1, ..., z_m]$ Vektor av värden för bankinsättningar och uttag gjorda vid sluten av perioderna $1, ..., m$. Betalning från banken till konsumtionsenheten har positivt, betalning i motsatt riktning negativt, tecken.

$\succsim_j$ Relationen »är minst lika bra som» mellan konsumtionsvektorer enligt den j:te konsumtionsenhetens subjektiva preferenser.

$\succ_j$ Relationen »är bättre än».

$\sim_j$ Relationen »är likvärdig med».

$=$ Likhetsrelation mellan två vektorer. Gäller när alla motsvarande komponenter är lika stora.

$\geqslant$ Objektiv relation mellan två vektorer, sådan att varje komponent i den vänstra vektorn är minst lika stor som motsvarande komponent i den högra vektorn.

$>$ Objektiv relation mellan två vektorer, sådan att varje komponent i den vänstra vektorn är minst lika stor som motsvarande komponent i den högra vektorn och åtminstone en komponent i den vänstra vektorn är större än motsvarande komponent i den högra vektorn.

$>>$ Objektiv relation mellan två vektorer, sådan att varje komponent i den vänstra vektorn är större än motsvarande komponent i den högra vektorn.

T Mängd omfattande alla möjliga vektorer $\mathbf{z}$ av bankinsättningar och uttag.

S Mängd av möjliga konsumtionsvektorer $\mathbf{c}$.

S_* Randen av den slutna mängden S, bestående av de vektorer $\mathbf{c}$ i relation till vilka inga objektivt fördelaktigare vektorer finns inom S.

Q Interiören av mängden S, bestående av de vektorer $\mathbf{c}$ i relation till vilka objektivt fördelaktigare vektorer finns inom S.

R^m Det m-dimensionella vektorsrummet.

$\cap$ Operationen »intersektion» mellan två mängder, resulterande i en ny mängd bestående av de bägge ursprungliga mängdernas gemensamma medlemmar.

$\cup$ Operationen »union» mellan två mängder, resulterande i en ny mängd bestående av alla de medlemmar som hör till endera eller bägge av de ursprungliga mängderna.

$\subset$ Relation mellan två mängder, sådan att den vänstra mängden helt innehålles i den högra. Därvid uteslutes ej möjligheten att de bägge mängderna kan vara identiska.

$\sim$ Operationen »tagande av komplement» till en mängd, resulterande i en ny mängd som består av alla de medlemmar inom det undersökta »universum» vilka ej hör till den ursprungliga mängden. Symbolen sättes till vänster om den mängd på vilken operationen utförs.

$\in$ Relation mellan en enskild medlem och den mängd i vilken medlemmen ingår.

i_{r_t} Betecknar räntesatsen på den under perioden t marginellt utnyttjade bankräkningen. När det endast finns en låneräkning och en depositionsräkning antar indiceringen r_t värdet L eller S. När låneräkningarnas antal är h och depositionsräkningarnas antal är k numreras de förra från -1 till $-h$ efter stigande räntesats och de senare från 1 till k efter fallande räntesats. När lån och depositioner kan göras till obegränsade värden på en och samma räkning utelämnas indiceringen.

$\varkappa_{r_t}$ Betecknar maximibeloppet som tillgodohavandet eller skulden kan uppgå till på den under perioden t marginellt utnyttjade bankräkningen.

$i^*_{\tau_t}$ Betecknar den genomsnittliga räntesatsen på de under perioden t helt fyllda låne- eller depositionsräkningarna. När endast en låneräkning och en depositionsräkning finns sammanfaller denna räntesats med i_{r_t}.

i_* Investeringens interna räntesats.

$\mathbf{r}=[r_1,\ldots,r_m]$ Vektor av indiceringar som används till att hänföra vissa storheter till en bestämd sekvens av marginellt utnyttjade bankräkningar under perioderna $1,\ldots,m$.

M Mängden av möjliga indiceringsvektorer $\mathbf{r}$.

$X_{\mathbf{r}}^{t,\tau}$ Kapitaliseringsfaktorn för belopp som under alla perioder från och med t till och med τ förräntas med de marginella räntesatser vilka bestäms av indiceringsvektorn $\mathbf{r}$. Dessa kapitaliseringsfaktorer är definierade för $t \leqslant \tau+1$. När $t=\tau$ blir kapitaliseringsfaktorerna enperiodiga. Definitionen har av matematiska skäl utsträckts till det fall då $t=\tau+1$, varvid kapitaliseringsfaktorerna erhållit värdet 1.

$K_{\mathbf{r}}^{\tau}(\mathbf{z})$ Kapitalvärdet framräknat till tidpunkten τ av de τ första periodernas betalningar i vektorn $\mathbf{z}$, där beräkningen sker med hjälp av de för dessa perioder enligt indiceringsvektorn $\mathbf{r}$ relevanta marginella räntesatserna. När $\tau=m$ utelämnas kapitalvärdesfunktionens suffix.

Kap. III

a_{ij} Den j:te obligationens avkastning vid slutet av den i:te perioden. Denna avkastning innehåller även inlösningsvärdet vid slutet av den period då obligationen inlöses.

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ Matris med m rader och n kolumner bestående av n obligationers avkastningar under m perioder.

D Determinanten till matrisen $\mathbf{A}$ när $m = n$. D_{ij} är co-faktorn till elementet på i:te raden och j:te kolumnen.

x_i Hela portföljens avkastning under i:te perioden.

q_j Antal behållna obligationer av j:te slaget.

$\bar{q}_j$ Antal initiellt innehavda obligationer av j:te slaget.

p_j Marknadspriset per obligation av j:te slaget.

F Hela obligationsportföljens marknadsvärde.

b_i »Imputed price» för den i:te periodens portföljavkastning.

U Nyttan av portföljavkastningarna $x_1, \ldots, x_m$. U_i och U_{ij} betecknar nyttofunktionens partiella derivator av första och andra ordningen.

G Den randade Hessiska derminanten bestående av nyttofunktionens partiella andraderivator och av koefficienterna i bivillkoret eller bivillkoren.

λ Gränsnyttan av ytterligare en optimalt placerad krona.

Kap. V

i_t Effektiv ränta på enperiodiga obligationer som löper under perioden t.

v_t Diskonteringsfaktor för perioden t, beräknad som $v_t = (1 + i_t)^{-1}$.

b_t Diskonteringsfaktor angivande det diskonterade värdet vid tidpunkten 0 av en krona som betalas vid tidpunkten t. Beräkningen sker med hjälp av de enperiodiga räntesatserna $i_1, \ldots, i_t$ så att $b_t = \prod_{\tau=1}^{t} v_\tau$.

a_t Det sammanlagda diskonterade värdet vid tidpunkten 0 av en hel serie enkronasbetalningar vid var och en av tidpunkterna $1, \ldots, t$. Beräkningen sker med hjälp av $i_1, \ldots, i_t$ så att $a_t = \sum_{\tau=1}^{t} b_\tau$.

K_t Kursen vid tidpunkten 0 på en obligation med t perioders återstående löptid.

r_t Nominella räntesatsen på en obligation som vid tidpunkten 0 har t perioders återstående löptid.

j_t Effektiva räntan kalkylerad vid tidpunkten 0 på en obligation med t perioders återstående löptid.

y_t Det diskonterade värdet vid tidpunkten 0 av en vid tidpunkten t betalad krona. Beräkningen sker för alla perioderna $1, \ldots, t$ med hjälp av effektiva räntesatsen j_t på t-periodiga obligationer så att $y_t = (1 + j_t)^{-t}$.

x_t Det sammanlagda diskonterade värdet vid tidpunkten 0 av en hel serie enkronasbetalningar vid var och en av tidpunkterna $1, \ldots, t$, där beräkningarna görs med effektiva räntesatsen j_t på t-periodiga obligationer. Därvid blir $x_t = \sum_{\tau=1}^{t} y_\tau$.

Kap. VI: 3–8

$\bar{u}$	Matematiska förväntan för nytta.
k, f, g	Koefficienterna i preferensfunktionen. I tvåperiodsfallet indiceras koefficienterna så att de skrivs f_1, f_2, g_{11}, g_{12}, g_{22}.
m	Medelvärdet för hela portföljens förväntade marknadsvärde vid placeringsperiodens slut.
σ^2	Variansen för hela portföljens förväntade marknadsvärde vid placeringsperiodens slut.
m_1, m_2	Medelvärden *per enhet* av tillgångarna 1 och 2 för deras förväntade marknadsvärden.
σ_1^2, σ_2^2	Varianser *per enhet* av tillgångarna 1 och 2 för deras förväntade marknadsvärden.
R	Korrelationskoefficient för de bägge tillgångarnas förväntade marknadsvärden vid placeringsperiodens slut.
Φ	Riskfri ekvivalent till hela portföljens osäkra förväntade marknadsvärde.
A_1, A_2	Matematisk förväntan för tillgångarnas marknadsvärden vid placeringsperiodens slut. Därvid är $A_1 = m_1$ och $A_2 = m_2$.
B_{11}, B_{22}	Matematisk förväntan för kvadraterna på tillgångarnas marknadsvärden vid placeringsperiodens slut. Därvid är $B_{11} = m_1^2 + \sigma_1^2$ och $B_{22} = m_2^2 + \sigma_2^2$.
$B_{12} = B_{21}$	Matematisk förväntan för produkten av tillgångarnas marknadsvärden vid placeringsperiodens slut. Därvid är $B_{12} = B_{21} = m_1 m_2 + R\sigma_1\sigma_2$.
F	Portföljens sktuella marknadsvärde.
$\hat{F}$	Det förväntade marknadsvärdet av portföljen vid placeringsperiodens slut.
p_1, p_2	De aktuella marknadsvärdena per enhet av tillgångarna 1 och 2.
$\hat{p}_1, \hat{p}_2$	De förväntade marknadsvärdena per enhet av tillgångarna 1 och 2.
q_1, q_2	Kvantiteter av tillgångarna 1 och 2.
$\bar{q}_1, \bar{q}_2$	Initiella tillgångskvantiteter.
y_1, y_2	Inkomsterna under *perioderna* 1 och 2.
c_1, c_2	De konsumerade värdena under *perioderna* 1 och 2.
D	Den randade Hessiska determinanten innehållande de partiella andraderivatorna av matematiskt förväntad nytta med avseende på tillgångskvantiteterna samt tillgångarnas aktuella priser. D_{ij} betecknar cofaktorn till elementet på i:te raden och j:te kolumnen i determinanten D.
G	Den randade Hessiska determinanten i tvåperiodsfallet. Se ovan under D. Co-faktorerna betecknas G_{ij}.
η_1, η_2	Elasticiteterna av efterfrågan efter tillgångarna 1 och 2 med avseende på portföljens aktuella värde.
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$	Elasticiteterna av efterfrågan efter tillgångarna 1 och 2 med avseende på tillgångarnas priser, beräknade under förutsättning att portföljen är optimalt sammansatt. Vänstra index anger tillgångskvantitet och högra fotindex anger tillgångspris.
E_{11}, E_{12} E_{21}, E_{22}	Elasticiteterna av efterfrågan efter tillgångarna 1 och 2 med avseende på tillgångarnas priser, beräknade under förutsättningen att portföljens aktuella penningvärde är givet oberoende av tillgångarnas priser.
α_1, α_2	Relativa andelar i hela portföljens värde för tillgångarna 1 och 2.

c_{11}, c_{12}
c_{21}, c_{22} Förväntningselasticiteter för tillgångarnas förväntade priser vid placeringsperiodens slut med avseende på deras aktuella priser. Alla möjliga framtida priser för en viss tillgång antas därvid bli förändrade i samma proportion. Vänstra fotindex åsyftar förväntat, högra fotindex aktuellt, pris.

Kap. VII

y_t Förväntad inkomst under perioden t. Utbetalas vid periodens slut, vid tidpunkten t.

c_t Konsumerat värde under perioden t. Betalas vid periodens slut, vid tidpunkten t.

q_t Behållet antal av den osäkra tillgången vid slutet av perioden t sedan periodens inkomst erhållits och dess konsumtion betalats. Kvantiteten q_t hålles oförändrad under hela perioden $t+1$ ända till dess slut då nya betalningar skall ske.

x_t Nettominskningen i antalet av den osäkra tillgången vid slutet av perioden t.

m_t Behållet värde i kontanter vid slutet av perioden t sedan periodens inkomst erhållits och dess konsumtion betalats. Kvantiteten m_t behålles oförändrad ända till slutet av $(t+1)$:a perioden.

z_t Nettominskningen i värdet av behållna kontanter vid slutet av perioden t.

$U(c_1, \ldots, c_n)$ Nyttofunktionen uttryckt i sekvensen av konsumerade värden under perioderna inom placerarens planeringshorisont. Skrivs i additiv form som $U_1(c_1) + \ldots + U_n(c_n)$.

$\phi(p_1, \ldots, p_n)$ Frekvensfunktionen för möjliga sekvenser av den osäkra tillgångens priser under perioderna $1, \ldots, n$. Denna representerar placerarens förväntningar.

$\bar{U}_t(\ )$ Matematisk förväntan för nytta beräknad vid den t:te periodens början — beroende på de initiella tillgångskvantiteterna, på förändringarna i dessa tillgångskvantiteter som genomförs vid t:te periodens slut samt på utvecklingen av den osäkra tillgångens marknadspris till och med den t:te perioden. Beräkningen har gjorts under förutsättning att varje vid t:te periodens slut kvarlämnad förmögenhet under de följande perioderna anpassas till den följande realiserade prisutvecklingen på ett i varje situation optimalt sätt.

$f_t(\ )$ Uttrycker det maximala värdet på matematiska förväntan för nytta $\bar{U}_t(\ )$, som kan erhållas genom ett optimalt val av värden på de vid t:te periodens slut genomförda förändringarna i tillgångsinnehaven, multiplicerat med en integral över frekvensfunktionen i avsikt att ändra tillbaka den vid beräkning av $\bar{U}_t(\ )$ använda betingade frekvensfunktionen till sin, för de fortsatta räkningarna mera lämpade, ursprungliga form.

LITTERATURFÖRTECKNING

Allen, R. G. D. *Basic Mathematics*, London 1962.

—— *Mathematical Economics*, London 1956.

Archibald, G. C. Utility, Risk, and Linearity, *The Journal of Political Economy*, 1959.

Arrow, K. J. Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations, *Econometrica*, 1951.

—— *Social Choice and Individual Values*, New York 1951.

Bailey, M. J. Formal Criteria for Investment Decisions, *The Journal of Political Economy*, 1959.

Baumol, W. J. The Neumann–Morgenstern Utility Index—an Ordinalist View, *Journal of Political Economy*, 1951.

Bellman, R. *Dynamic Programming*, Princeton 1957.

Blakey, J. *University Mathematics*, Glasgow 1949.

Boulding, K. E. The Theory of a Single Investment, *Quarterly Journal of Economics*, 1935.

—— Time and Investment, *Economica*, 1936.

Brownlee, O. H. and Scott, I. O. Utility, Liquidity and Debt Management, *Econometrica*, 1963.

Bushaw, D. W. and Clower, R. W. *Introduction to Mathematical Economics*, Homewood 1957.

Chernoff, H. and Moses, L. E. *Elementary Decision Theory*, New York 1957.

Clower, R. W. Se Bushaw, D. W. and Clower, R. W.

Comprehensive Bond Values, Boston 1953.

Conard, J. W. *An Introduction to the Theory of Interest*, Berkeley 1959.

Courant, R. *Differential and Integral Calculus*, Vol. I–II, Glasgow 1959.

Cramér, H. *The Elements of Probability Theory and Some of Its Applications*, Uppsala 1954.

Debreu, G. *Theory of Value—an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, New York 1959.

Dickson, H. Forest Rotation—a Contribution to the Theory of the Optimum Investment Period, *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1953.

—— *Reflexioner kring några nyare planerings- och kapitalteorier*, Uppsala 1941 (stencil).

—— Vad menar vi med orden 'variabel' och 'funktion'?, *Ekonomisk Tidskrift*, 1962.

Domar, E. D. and Musgrave, R. Proportional Income Taxation and Risk-Taking, *Quarterly Journal of Economics*, 1944.

Dorfman, R., Samuelson, P. A. and Solow, R. M. *Linear Programming and Economic Analysis*, New York 1958.

Farrar, D. E. *The Investment Decision under Uncertainty*, Englewood Cliffs 1963.

Faxén, K. O. *Monetary and Fiscal Policy under Uncertainty*, Stockholm 1957.
Fisher, I. *The Theory of Interest*, New York 1930.
Friedman, M. and Savage, L. J. The Utility Analysis of Choices Involving Risk, *The Journal of Political Economy*, 1948.
Frisch, R. *Innledning til produksjonsteorien*, Oslo 1962.
Hagström, K. G. Se Huss, E. and Hagström, K. G.
Hansen, B. »Kort og lang rente» i Nyboe–Andersen, P. *Laanerenten*, København 1949.
Hart, A. G. Anticipations, Business Planning and the Cycle, *The Quarterly Journal of Economics*, 1936–37.
Hill, M. A. Se Linker, J. B. and Hill, M. A.
Hicks, J. R. *Value and Capital*, Oxford 1946.
Hirschleifer, J. On the Theory of Optimal Investment Decision, *The Journal of Political Economy*, 1958.
Huss, E. and Hagström, K. G. *Bond Values*, Stockholm 1929.
Kemney, J. G., Snell, J. L. and Thompson, G. L. *Introduction to Finite Mathematics*, Englewood Cliffs 1957.
Knight, F. H. Capital, Time and the Interest Rate, *Economica*, 1934.
Lindahl, E. *Studies in the Theory of Money and Capital*, New York 1939.
Linker, J. B. and Hill, M. A. *Mathematics of Finance*, New York 1948.
Lutz, F. A. The Criterion of Maximum Profits in the Theory of Investment, *Quaterly Journal of Economics*, 1945.
—— The Term Structure of Interest Rates, *Quarterly Journal of Economics*, 1940.
Lutz, F. A. and Lutz, V. *The Theory of Investment of the Firm*, Princeton 1951.
Marc-Wogau, K. *Modern logik*, Örebro 1961.
Markowitz, H. Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 1952.
—— *Portfolio Selection*, New York 1959.
—— The Utility of Wealth, *The Journal of Political Economy*, 1952.
Marschak, J. Rational Behaviour, Uncertain Prospects and Measurable Utility, *Econometrica*, 1950.
Massé, P. *Le choix des investissements*, Paris 1959.
Morgenstern, O. Se v. Neumann, J. and Morgenstern, O.
Moses, L. E. Se Chernoff, H. and Moses, L. E.
Musgrave, R. Se Domar, E. D. and Musgrave, R.
Musgrave, R. *The Theory of Public Finance*, New York 1959.
Nagell, T. *Lärobok i algebra*, Uppsala 1949.
v. Neumann, J. and Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton 1943.
Newman, P. and Read, R. Representation Problems for Preference Orderings, *The Journal of Economic Behaviour*, 1961.
Palander, T. Noter till Keynes, *Sysselsättningsproblemet*, Stockholm 1945, (otryckt korrekturavdrag).
—— *Värdebeständighet — ett problem vid sparande, livförsäkringar och pensioner* samt appendix i särskild volym *Om ovisshet, värderingsenheter, riskvärdering och förväntningsspridning*, Uppsala 1957.
Puu, T. En metod för grafisk avläsning av effektiva obligationsräntan, *Svensk Sparbankstidskrift*, 1962.

—— Mikroteori för ett enskilt subjekts optimala förmögenhetssammansättning, *Ekonomisk Tidskrift*, 1962 och 1963.

Read, R. Se Newman, P. and Read, R.

Richter, M. K. Cardinal Utility, Portfolio Selection and Taxation, *The Review of Economic Studies*, 1960.

Samuelson, P. A. *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Mass. 1961.

—— Se Dorfman, R. and Samuelson, P. A. and Solow, R. M.

—— Some Aspects of the Pure Theory of Capital, *Quarterly Journal of Economics*, 1936–37.

Sauvain, H. C. Changing Interest Rates and the Investment Portfolio, *The Journal of Finance*, 1959.

Savage, L. J. *The Foundations of Statistics*, New York 1954.

—— Se Friedman, M. and Savage, L. J.

Schneider, E. *Investering og rente*, København 1944.

de Scitovszky, T. A Study of Interest and Capital, *Economica*, 1940.

Scott, I. O. The Availability Doctrine: Theoretical Underpinnings, *The Review of Economic Studies*, 1957.

Scott, I. O. Se Brownlee, O. H. and Scott, I. O.

Shackle, G. L. S. *Decision, Order and Time in Human Affairs*, Cambridge 1961.

—— *Uncertainty in Economics and Other Reflections*, Cambridge 1955.

Shilov, G. *An Introduction to the Theory of Linear Spaces*, Englewood Cliffs 1961.

Snell, J. L. Se Kemney, J. G., Snell, J. L. and Thompson, G. L.

Solow, R. M. Se Dorfman, R., Samuelson, P. A. and Solow, R. M.

Ståhl, I. *Risk- och avkastningsförändringars verkningar på portföljsammansättning, sparande och investeringar*, Stockholm 1962 (stencil).

Suppes, P. *Introduction to Logic*, Princeton 1957.

Svennilson, I. *Ekonomisk planering*, Uppsala 1938.

Theil, H. *Optimal Decision Rules for Government and Industry*, Amsterdam 1964.

Tintner, G. The Theory of Choice under Subjective Risk and Uncertainty, *Econometrica*, 1941.

Tobin, J. Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk, *The Review of Economic Studies*, 1957.

Tobin, J. The Theory of Asset Preference i Hahn, F. (Ed.) *The Theory of Interest Rates*, (utkommer 1964).

Uldall-Hansen, H. *Tid og rente*, København 1959.

Wicksell, K. *Lectures on Political Economy*, I–II, London 1935.

Williams, J. B. *The Theory of Investment Value*, Amsterdam 1938.

Wold, H. *Demand Analysis*, Uppsala 1952.

Wright, C. A. A Note on 'Time and Investment', *Economica*, 1936.

Wright, J. F. Notes on the Marginal Efficiency of Capital, *Oxford Economic Papers*, 1963.

ALMQVIST & WIKSELL 631074